Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2014
24.09.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1: (1 + 4 + 4 + 1 = 10 Punkte)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Begründen Sie, warum A diagonalisierbar ist.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A samt ihrer jeweiligen algebraischen Vielfachheit.

(c) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert λ von A eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraums $E_A(\lambda)$.

(d) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie S^{-1} explizit an.

Aufgabe 2: ((2 + 3) + 5 = 10 Punkte)

(a) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f_\alpha(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha^2(3z - y) + 3x^2yz^2 \\ -\alpha^2 x + x^3z^2 - 8z \\ -4\alpha y + 12x + 2x^3yz \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Bestimmen Sie die Menge M aller $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $(\nabla \times f_\alpha)(\vec{x}) = \vec{0}$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(ii) Berechnen Sie für jedes $\alpha \in M$ das Kurvenintegral $\int_\gamma f_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ über den Weg

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{definiert durch} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{2}t^3\right) \\ \sin^3\left(\frac{\pi}{2}t^4\right) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

(b) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sin(z)(z^5 + 5y^9 + 1) \\ \frac{z^3}{3}(3x^9 + 9\cos^3(z) + 5) \\ (1 - z^2)\cosh(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Bezeichne $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z \geq 0\right\}$ die obere Halbsphäre im $\mathbb{R}^3$. Die äußere Einheitsnormale $\vec{n}$ zeige auf S stets weg vom Ursprung. Berechnen Sie

$$\int_S g(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x}).$$

Hinweis: Man kann hier den Gauß'schen Divergenzsatz anwenden.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 3: (5 + (3 + 2) = 10 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x + xy^2 \qquad \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema von f und entscheiden Sie, ob es sich dabei um lokale Maxima oder Minima handelt.

(b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = (y-z)e^{y-z} - e^{-x^3} \qquad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Zeigen Sie: Es existiert eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\left(-1, \frac{1}{4}\right) \in U$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $-\frac{3}{4} \in V$ und ein $\varphi \in C^1(U,V)$ so, dass

$$F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x,y)$$

für alle $(x,y) \in U$ und alle $z \in V$ gilt.

(ii) Berechnen Sie $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$ für alle $(x,y) \in U$.

Aufgabe 4: ((2 + 2 + 1) + (3 + 2) = 10 Punkte)

(a) (i) Zeigen Sie die Gleichheit

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos(t)} \mathrm{d}t = 2\mathrm{i} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z \text{ mit } f(z) = \frac{1}{z^2 - 6z + 1}, \text{ sowie } \gamma(t) = e^{\mathrm{i}t} \text{ mit } t \in [0, 2\pi].$$

(ii) Bestimmen Sie das Residuum $\mathrm{Res}(f, z_0)$ von f bei $z_0 = 3 - 2\sqrt{2}$.

(iii) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos(t)} \mathrm{d}t$.

(b) Sei $g : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(t) = t^3$ für alle $t \in (-\pi, \pi]$.

(i) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten $(\alpha_k(g))_{k \in \mathbb{N}_0}$, sowie $(\beta_k(g))_{k \in \mathbb{N}}$ von g:

$$\alpha_k(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(kt) \mathrm{d}t \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad \beta_k(g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(kt) \mathrm{d}t \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(ii) Für welche $t \in (-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe

$$\frac{\alpha_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k(g) \cos(kt) + \beta_k(g) \sin(kt)]$$

von g? Geben Sie für solche t ihren Grenzwert an.

Viel Erfolg!

Die Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **22.10.2014**, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Hörsaal am Fasanengarten (Gebäude 50.35) statt.