Institut für Analysis
Prof. Dr. Roland Schnaubelt
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS 2013/14
22.10.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1:

(a) Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar nach dem Spektralsatz.

(b) Für das charakteristische Polynom χ_A gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \cdot(-1) & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & \cdot(-1) & \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 3+\lambda \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} \end{array} \\
&= (3+\lambda) \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & + & \cdot 2 \end{array} \\ \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 0 \\ 3+\lambda & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \end{array} = (3+\lambda)^2 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \cdot 2 & + & \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array} \\
&= (3+\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. nach}}{\underset{\text{2-ter Spalte}}{=}} (3+\lambda)^2(3-\lambda) \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda+3)^2
\end{aligned}
$$

Daher ist $\operatorname{spec}(A) = \{-3, 3\}$. Die algebraischen Vielfachheiten sind $m_a(-3) = 2$ und $m_a(3) = 1$.

(c) Für jedes $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ gilt $E_A(\lambda) = \operatorname{Kern}(A - \lambda I_3)$. Wir berechnen zunächst eine Basis von $E_A(\lambda)$ mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens und des (-1)-Ergänzungs-Tricks. Anschließend werden diese mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren zu einer ONB von $E_A(\lambda)$ transformiert:

- $E_A(-3)$:

$$
A - (-3)I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-1) \ \ \cdot(-1) \\ + \\ \quad\ \ + \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Folglich ist $E_A(-3) = \operatorname{span}\{\vec{v}_0, \vec{v}_1\}$ mit

$$
\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
$$

Mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren berechnet man

$$
\begin{aligned}
\vec{w}_0 &= \frac{1}{\|\vec{v}_0\|}\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\\
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 - (\vec{v}_1|\vec{w}_0)\,\vec{w}_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix},\\
\vec{w}_1 &= \frac{1}{\|\vec{u}_1\|}\vec{u}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Damit ist $B_{-3} = \{\vec{w}_0, \vec{w}_1\}$ eine ONB von $E_A(-3)$.

- $E_A(3)$:

$$
\begin{aligned}
A - 3I_3 &= \begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \cdot(-1)\\ +\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\0&6&-6\end{pmatrix} \begin{matrix}\cdot(\frac{1}{2})\\ +\\ \end{matrix}\\
&\sim \begin{pmatrix}-4&2&2\\0&-3&3\\0&6&-6\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \cdot 2 \;\; | \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\\ +\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}-4&2&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{matrix}+ \quad | \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\\ \cdot(-2)\\ \end{matrix}\\
&\sim \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Folglich ist $E_A(3) = \operatorname{span}\{\vec{v}_2\}$ mit

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren berechnet man

$$\vec{w}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_0\|}\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Damit ist $B_3 = \{\vec{w}_2\}$ eine ONB von $E_A(3)$.

(d) Es reicht aus, die Vektoren $\vec{w}_0, \vec{w}_1, \vec{w}_2$ als Spalten von S zu schreiben

$$S = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

und als Diagonaleinträge von D die Eigenwerte von A zu nehmen (in der Reihenfolge, wie sie S vorgibt)

$$D = \begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-3&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Nach dem Spektralsatz gilt $E(-3) \perp E(3)$. Da B_{-3} und B_3 ONBen von $E_A(-3)$ bzw. $E_A(3)$ sind, ist S eine orthogonale Matrix. Daher gilt

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:

(a) (i) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(\nabla \times f_\alpha)(x,y,z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{\alpha\,3}}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial f_{\alpha\,2}}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_{\alpha\,1}}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial f_{\alpha\,3}}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_{\alpha\,2}}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial f_{\alpha\,1}}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4\alpha + 2x^3z - 2x^3z + 8 \\ 3\alpha^2 + 6x^2yz - 12 - 6x^2yz \\ -\alpha^2 + 3x^2z^2 + \alpha^2 - 3x^2z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\alpha + 8 \\ 3\alpha^2 - 12 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Folglich ist

$$(\nabla \times f_\alpha)(x,y,z) = \vec{0} \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow (-4\alpha + 8 = 0) \wedge (3\alpha^2 - 12 = 0) \Leftrightarrow \alpha = 2 \wedge \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

Also ist $M = \{2\}$.

(ii) Für jedes $\alpha \in M$ erfüllt f_α die Verträglichkeitsbedingung auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R}^3$. Damit ist f_α ein Potentialfeld und das Integral

$$\int_\gamma g_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

ist wegunabhängig (hängt nur von $\gamma(0) = \vec{0}$ und $\gamma(1) = (1,1,1)^T$ ab). Wähle etwa $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0,1]$. Es ist dann

$$\tilde{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [0,1]$. Nach Obigem folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma f_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_{\tilde{\gamma}} f_\alpha(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_0^1 f_\alpha(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\alpha^2 2t + 3t^5 - \alpha^2 t + t^5 - 8t - 4\alpha t + 12t + 2t^5\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(6t^5 + t(\alpha^2 - 4\alpha + 4)\right) \mathrm{d}t = 1 + \frac{(\alpha-2)^2}{2} \overset{\alpha=2}{=} 1.\end{aligned}$$

(b) Sei $S' = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1 \wedge z = 0\big\}$, die Einheitskreisscheibe in der x-y-Ebene, sowie $V = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1 \wedge z \ge 0\big\}$ die obere Hälfte der Einheitskugel. Offenbar ist $\partial V = S \cup S'$. Mit dem Satz von Gauß gilt

$$\int_S g(\vec{x}) \cdot \vec{n}(x) \mathrm{d}\sigma(\vec{x}) = \underbrace{\int_V (\nabla \cdot g)(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}}_{=:I_1} - \underbrace{\int_{S'} g(\vec{x}) \cdot \vec{n}(x) \mathrm{d}\sigma(\vec{x})}_{=:I_2}.$$

Ferner gilt

$$(\nabla \cdot g)(x,y,z) = \underbrace{\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y,z)}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y,z)}_{=0} + \frac{\partial g_3}{\partial x}(x,y,z) = -2z\cosh(x^2+y^2)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Mit Hilfe der Kugelkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_V (\nabla \cdot g)(x,y,z) \mathrm{d}((x,y,z)) \\
&= -2 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r\sin(\vartheta)\cosh(r^2(\cos^2(\varphi)\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\varphi)\cos^2(\vartheta)))r^2\cos(\vartheta) \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r \\
&= -4\pi \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\cosh(r^2\cos^2(\vartheta)) \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}r \\
&= 2\pi \int_0^1 r\left[\sinh(r^2\cos^2(\vartheta))\right]_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}r \\
&= -2\pi \int_0^1 r\sinh(r^2) \mathrm{d}r = -\pi\left[\cosh(r^2)\right]_{r=0}^1 = \pi(1-\cosh(1)).
\end{aligned}$$

Wir stellen zunächst fest, dass

$$\vec{n}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für alle $\vec{x} \in S'$ gilt. Mit Hilfe der Polarkoordinaten folgt

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{S'} g(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x}) = -\int_{S'} g_3(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x}) = -\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}} \cosh(x^2+y^2) \mathrm{d}((x,y)) \\
&= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \cosh(\rho^2\cos^2(\varphi) + \rho^2\sin^2(\varphi))\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho = -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\cosh(\rho^2) \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\rho \\
&= -2\pi \int_0^1 \rho\cosh(\rho^2) \mathrm{d}\rho = -\pi\left[\sinh(\rho^2)\right]_{\rho=0}^1 = -\pi\sinh(1).
\end{aligned}$$

Insgesamt also

$$\int_S g(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \mathrm{d}\sigma(\vec{x}) = I_1 - I_2 = \pi(1-\cosh(1)+\sinh(1)) = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Aufgabe 3:

(a) Es gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-1+y^2 & 2xy \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Die kritischen Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ von f werden durch

$$f'(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow (x^2-1+y^2 = 0) \wedge (2xy = 0)$$

charakterisiert. Es ist also $x = 0$ oder $y = 0$.

- Ist $y = 0$, so folgt mit $x^2 - 1 + \underbrace{y^2}_{=0} = 0$, dass $x \in \{-1, 1\}$.

- Ist $x = 0$, so folgt mit $\underbrace{x^2}_{=0} -1 + y^2 = 0$, dass $y \in \{-1, 1\}$.

Insgesamt sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ sowie } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

genau die kritischen Punkte von f.

Ferner gilt

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Untersuche $H_f(\vec{v}_i)$ für $i \in \{1, \dots, 4\}$ auf Definitheit:

- $H_f(\vec{v}_1)$: Es ist

  $$H_f(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2.$$

  Also ist $H_f(\vec{v}_1)$ positiv definit und $\vec{v}_1$ ist die Stelle eines lokalen Minimums.

- $H_f(\vec{v}_2)$: Es ist

  $$H_f(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2I_2.$$

  Also ist $H_f(\vec{v}_2)$ negativ definit und $\vec{v}_2$ ist die Stelle eines lokalen Maximums.

- $H_f(\vec{v}_3)$: Es ist

  $$H_f(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Bestimme die Eigenwerte von $H_f(\vec{v}_3)$. Sei dazu $\lambda \in \mathbb{C}$. Es gilt

  $$\chi_{H_f(\vec{v}_3}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

  Also ist $\operatorname{spec}(H_f(\vec{v}_3)) = \{-2, 2\}$ und $H_f(\vec{v}_2)$ demnach indefinit. Also liegt bei $\vec{v}_3$ keine Stelle eines lokalen Extremums vor.

- $H_f(\vec{v}_4)$: Es ist

  $$H_f(\vec{v}_4) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -H_f(\vec{v}_3).$$

  Also ist auch $\operatorname{spec}(H_f(\vec{v}_4)) = \{2, -2\}$ und $H_f(\vec{v}_4)$ ebenfalls indefinit. Damit liegt auch bei $\vec{v}_4$ keine Stelle eines lokalen Extremums vor.

(b) (i) Wir halten zunächst fest, dass

$$F\left(-1, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) e^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} - e^1 = e - e = 0.$$

Die Existenz der gesuchten U, V und φ folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, falls

$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(-1, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right) \neq 0$$

gilt. Tatsächlich ist

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -e^{y-z} - (y-z)e^{y-z}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Insbesondere ist

$$\frac{\partial F}{\partial z}\left(-1, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right) = -2e \neq 0.$$

(ii) Ebenfalls nach dem Satz über implizit definierte Funktionen gilt

$$\varphi'(x, y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x, y)}(x, y, \varphi(x, y))$$

für alle $(x, y) \in U$. Wir berechnen

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = e^{y-z} + (y-z)e^{y-z}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Es folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \quad = \quad \frac{e^{y-z} + (y-z)e^{y-z}}{e^{y-z} + (y-z)e^{y-z}} = 1$$

für alle $(x, y) \in U$.

Aufgabe 4:

(a) (i) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{1}{3-\cos(t)} = \frac{1}{3 - \frac{e^{\mathrm{i}t}+e^{-\mathrm{i}t}}{2}} = \frac{2}{6 - e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}} = \frac{2}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}}{6e^{\mathrm{i}t} - e^{2\mathrm{i}t} - 1} = 2\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}}{(e^{\mathrm{i}t})^2 - 6e^{\mathrm{i}t} + 1}.$$

Wegen $\gamma'(t) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}$ für alle $t \in [0, 2\pi]$, gilt nach der Definition des komplexen Kurvenintegrals in der Tat

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos(t)}\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}}{(e^{\mathrm{i}t})^2 - 6e^{\mathrm{i}t} - 1}\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = 2\mathrm{i}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

(ii) Die Nullstellen von $z^2 - 6z + 1$ sind

$$z_0 = 3 - \sqrt{9-1} = 3 - 2\sqrt{2} \text{ und } z_1 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Also gilt

$$f(z) = \frac{1}{(z - 3 + 2\sqrt{2})(z - 3 - 2\sqrt{2})}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1\}$. Insbesondere hat f bei z_0 einen einfachen Pol und es gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{z - 3 - 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

(iii) Der Weg γ umläuft die isolierte Singularität z_0 von f ein Mal mit positiver Orientierung ($|z_0| = \left|3 - 2\sqrt{2}\right| < 1$) und z_1 gar nicht ($|z_1| = 3 + 2\sqrt{2} > 1$). Mit dem Residuensatz folgt

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \cos(t)} \mathrm{d}t = 2\mathrm{i} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 2\mathrm{i}(2\pi\mathrm{i}\operatorname{Res}(f, z_0)) = \frac{4\pi\sqrt{2}}{8} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

(b) (i) Da g eine ungerade Funktion ist, ist $\alpha_k(g) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt ferner:

$$\begin{aligned}
\beta_k(g) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(kt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^3 \sin(kt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{t^3}_{u(t)} \underbrace{\sin(kt)}_{v'(t)} \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{2}{\pi} \left(\left[-\frac{t^3}{k}\cos(kt) \right]_{t=0}^{\pi} + \frac{3}{k} \int_0^{\pi} \underbrace{t^2}_{u(t)} \underbrace{\cos(kt)}_{v'(t)} \mathrm{d}t \right) \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{2(-1)^{k+1}\pi^2}{k} + \frac{6}{\pi k} \left(\left[\frac{t^2}{k}\sin(kt) \right]_{t=0}^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} \underbrace{t}_{u(t)} \underbrace{\sin(kt)}_{v'(t)} \mathrm{d}t \right) \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \frac{2(-1)^{k+1}\pi^2}{k} - \frac{12}{\pi k^2} \left(\left[-\frac{t}{k}\cos(kt) \right]_{t=0}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos(kt)\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{2(-1)^{k+1}\pi^2}{k} + \frac{12(-1)^k}{k^3} - \frac{12}{\pi k^4} \left[\sin(kt)\right]_{t=0}^{\pi} = 2(-1)^k \left(\frac{6}{k^3} - \frac{\pi^2}{k} \right)
\end{aligned}$$

(ii) Da für jedes $t_0 \in (-\pi, \pi]$ die Grenzwerte

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to t_0+} g(t) &=: g(t_0)+, \\
\lim_{t \to t_0-} g(t) &=: g(t_0)-, \\
\lim_{h \to 0+} \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)+}{h} &=: g'(t_0)+, \\
\lim_{h \to 0-} \frac{g(t_0 + h) - g(t_0)-}{h} &=: g'(t_0)-
\end{aligned}$$

existieren, konvergiert die Fourier-Reihe für jedes solche t_0 nach dem Satz über die punktweise Konvergenz der Fourier-Reihen gegen $\frac{(g(t_0)+)+(g(t_0)-)}{2}$. Insbesondere konvergiert die Fourier-Reihe für jedes $t \in (-\pi, \pi)$ gegen $g(t) = t^3$.

Für $t = \pi$ konvergiert die Fourier-Reihe von g nach Obigem gegen

$$\frac{(g(\pi)+) + (g(\pi)-)}{2} = \frac{\pi^3 + (-\pi)^3}{2} = 0.$$