Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
18.09.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A inklusive ihrer algebraischen Vielfachheiten.

b) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A den dazugehörigen Eigenraum an.

c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist und geben Sie diese Diagonalmatrix an.

Aufgabe 2 ((1+6)+3=10 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$$

und

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 5, y = z\}.$$

(i) Was beschreiben die beiden Gleichungen in M für Mengen? Wie sieht M dementsprechend aus (keine Skizze verlangt)?

(ii) Berechnen Sie das Maximum und Minimum von f auf M und geben Sie an, wo diese angenommen werden.

b) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ xy+yz+zx \\ xyz \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobimatrix von g und zeigen Sie, dass es dann eine offene Menge U mit $(x_0,y_0,z_0) \in U$ und eine offene Menge V mit $g(x_0,y_0,z_0) \in V$ gibt, sodass $g : U \to V$ bijektiv ist, falls $(x_0-y_0)(y_0-z_0)(z_0-x_0) \neq 0$ gilt.

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (4+2+4=10 Punkte)

a) Berechnen Sie für $\gamma(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ ($t \in [0, 2\pi]$) das Integral

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{\sin(z)(z-1)}\,\mathrm{d}z.$$

b) Sei B die Einheitskreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß das Integral

$$\oint_{\partial B} \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \sin(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix} \cdot\, \mathrm{d}(x,y).$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 4 ((2+5)+3=10 Punkte)

a) Seien die Halbkugeloberfläche H und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,3) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$H := \left\{ \left(x, y, \sqrt{16-(x^2+y^2)}\right) \mid x^2+y^2 \leqslant 16 \right\}, \qquad f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}}.$$

(i) Berechnen Sie für die vorgegebene Parametrisierung g von H den (nicht normierten) Normalenvektor $\partial_x g \times \partial_y g$.

(ii) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_H f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$$

durch Einsetzen der Definition, Wechsel zu Polarkoordinaten und schließlich der Substitution des zu f gehörigen Wurzelausdrucks im Nenner.

b) Die Fouriertransformation von $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $h(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, ist nach Vorlesung die Funktion $\mathcal{F}h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{F}h(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$. Errechnen Sie daraus die Fouriertransformation der Funktion

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad j(x) = x\mathrm{e}^{-|x-42|}.$$

Hinweis: Dass j absolut integrierbar ist, muss nicht gezeigt werden.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Donnerstag, den **15.10.2015**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) und unter `www.math.kit.edu/iana1` veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **21.10.2015**, von **16 bis 18 Uhr** im Tulla-Hörsaal (Geb. 11.40) statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **26.10.2015** bis **30.10.2015** statt.