Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

SS 2015
18.09.2015

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+3+4=10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A inklusive ihrer algebraischen Vielfachheiten.

b) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A den dazugehörigen Eigenraum an.

c) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $S^T AS$ eine Diagonalmatrix ist und geben Sie diese Diagonalmatrix an.

Lösungsvorschlag

a) Für das charakteristische Polynom von A gilt

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. 3. Z.}}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((3-\lambda)(4-\lambda)-2) = -(\lambda-2)(\lambda^2-7\lambda+10)$$

$$= -(\lambda-2)^2(\lambda-5).$$

Somit sind die Eigenwerte von A 2 (algebraische Vielfachheit 2) und 5 (algebraische Vielfachheit 1).

b) Zunächst zum Eigenwert 2. Es gilt

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1)\ \cdot(-1) \\ + \\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

womit mit dem (-1)-Trick oder durch Ausschreiben der Gleichung folgt, dass

$$E_A(2) = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

Nun zum Eigenwert 5. Es gilt

$$A-5I=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\quad \Big|\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Somit gilt nach dem (-1)-Trick oder durch Aufschreiben der Gleichungen, dass

$$E_A(5)=\operatorname{lin}\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\}.$$

c) Prinzipiell müssen wir die Eigenvektoren in die Spalten von S schreiben, um die angesprochene Gleichung zu erhalten. Damit S orthogonal ist, müssen die Spalten jedoch normiert und zueinander orthogonal sein. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind laut Vorlesung orthogonal, womit wir nur die beiden Vektoren aus $E_A(2)$ mit dem Gram-Schmitt-Verfahren orthogonalisieren und dann alle Vektoren normieren müssen. Es gilt

$$b_1:=\frac{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\Big|\, b_1\right)b_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

und somit

$$b_2=\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\|}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

Der normierte Eigenvektor zum Eigenwert 5 lautet $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$. Damit folgt

$$S=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\sqrt{\frac{2}{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$$

mit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 ((1+6)+3=10 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z$$
und
$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 5, y = z\}.$$

(i) Was beschreiben die beiden Gleichungen in M für Mengen? Wie sieht M dementsprechend aus (keine Skizze verlangt)?

(ii) Berechnen Sie das Maximum und Minimum von f auf M und geben Sie an, wo diese angenommen werden.

b) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch
$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ xy+yz+zx \\ xyz \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobimatrix von g und zeigen Sie, dass es dann eine offene Menge U mit $(x_0,y_0,z_0) \in U$ und eine offene Menge V mit $g(x_0,y_0,z_0) \in V$ gibt, sodass $g : U \to V$ bijektiv ist, falls $(x_0-y_0)(y_0-z_0)(z_0-x_0) \neq 0$ gilt.

Lösungsvorschlag

a) (i) Die erste Gleichung in M beschreibt einen Zylinder in Richtung der z-Achse (Mittelpunkt des Kreises $(1,0)$, Radius $\sqrt{5}$). Die zweite Gleichung beschreibt eine Ebene (x-Variable ist beliebig wählbar und $y = z$ beschreibt für festes x eine Gerade). Diese liegt nicht parallel zur z-Achse und schneidet deshalb den Zylinder in einer Ellipse (die kein Kreis ist, da die Ebene auch nicht parallel zur x-y-Ebene liegt).

(ii) f ist eine auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetige Funktion. M ist als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Funktion h (siehe unten) abgeschlossen, zudem beschränkt, da x und y durch die Kreisgleichung beschränkt sind und $z = y$ in M gilt. Somit nimmt f als stetige Funktion auf der kompakten Menge M sein Maximum und Minimum an.
Zunächst definieren wir die Funktion $h : \mathbb{R}^3 \to R^2$ durch
$$h(x,y,z) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 + y^2 - 5 \\ y - z \end{pmatrix}.$$

Gesucht sind nun die Extrema von f unter der Nebenbedingung $h = 0$. Wir können die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden, da f sowie h auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar sind (alle partiellen Ableitungen existieren und sind stetig) und h in eine geringere Dimension abbildet. Es gilt
$$h'(x) = \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2y & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

womit h' immer vollen Rang 2 hat, außer wenn die erste Zeile eine Nullzeile ist, also in $(1,0,z)$ für beliebiges z. Diese Punkte liegen jedoch nicht in M und sind deshalb irrelevant. Hat nun f in (x_0,y_0,z_0) ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $h=0$, so müssen neben den Gleichungen

$$(x_0-1)^2+y_0^2-5=0 \tag{1}$$
$$y_0-z_0=0 \tag{2}$$

auch noch die drei Gleichungen

$$2x_0+\lambda_1\cdot 2(x_0-1)=0 \tag{3}$$
$$2y_0+\lambda_1\cdot 2y_0+\lambda_2=0 \tag{4}$$
$$1+\lambda_2\cdot(-1)=0 \tag{5}$$

für bestimmte $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ erfüllt sein. Aus (5) folgt $\lambda_2=1$. (3) kann für $\lambda_1=-1$ nicht erfüllt sein, weshalb wir (4) umstellen können zu

$$y_0=-\frac{1}{2(\lambda_1+1)}$$

und (3) zu

$$x_0=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+1}.$$

Setzen wir diese beiden Informationen in (1) ein, erhalten wir

$$\frac{1}{(\lambda_1+1)^2}+\frac{1}{4(\lambda_1+1)^2}=5,$$

also $(1+\lambda_1)^2=\frac{1}{4}$, folglich $\lambda_1=-\frac{1}{2}$ oder $\lambda_1=-\frac{3}{2}$. Im ersten Fall folgt aus (3) $x_0=-1$, aus (4) $y_0=-1$ und aus (2) $z_0=-1$. Im zweiten Fall folgt aus (3) $x_0=3$, aus (4) $y_0=1$ und aus (2) $z_0=1$.

Einsetzen in f ergibt $f(-1,-1,-1)=2$ und $f(3,1,1)=11$. Somit ist das Maximum von f auf M durch 11 gegeben und wird in $(3,1,1)$ angenommen, das Minimum ist 2 und wird in $(-1,-1,-1)$ angenommen.

b) Wir wollen den Umkehrsatz anwenden. Damit die Behauptung folgt, benötigen wir ausschließlich, dass die Jacobimatrix von g in (x_0,y_0,z_0) invertierbar ist, also eine Determinante ungleich 0 hat. Es gilt

$$g'(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ y+z & x+z & x+y\\ yz & xz & xy\end{pmatrix}$$

und somit

$$\det(g'(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y+z & x-y & x-z \\ yz & (x-y)z & (x-z)y \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 1. Z.}}{=} \begin{vmatrix} x-y & x-z \\ (x-y)z & (x-z)y \end{vmatrix}$$
$$= (x-y)(x-z)y - (x-z)(x-y)z = (x-y)(x-z)(y-z).$$

Somit folgt die Behauptung, wenn dieser Ausdruck nicht Null ist, wie es in der Aufgabe vorgegeben ist.

Aufgabe 3 (4+2+4=10 Punkte)

a) Berechnen Sie für $\gamma(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(t \in [0, 2\pi])$ das Integral

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{\sin(z)(z-1)}\,\mathrm{d}z.$$

b) Sei B die Einheitskreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß das Integral

$$\oint_{\partial B} \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \sin(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix} \cdot\, \mathrm{d}(x,y).$$

c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{y\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Lösungsvorschlag

a) Wir benutzen den Residuensatz und bezeichnen den Integranden mit f. f ist auf $U_3(0) \setminus \{0,1\}$ holomorph und γ verläuft in dieser Menge. Beide isolierten Singularitäten sind Pole erster Ordnung.
Bei 1 ist dies direkt aus der Charakterisierung aus Satz 22.13 ersichtlich, da $g(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{\sin(z)}$ eine Funktion $g \in H(U_3(0) \setminus \{0\})$ definiert mit $g(1) = \frac{\mathrm{e}}{\sin(1)} \neq 0$.
Bei 0 folgt es ebenso mit $g(z) = \frac{z\mathrm{e}^z}{\sin(z)(z-1)}$. Wegen des bekannten Grenzwertes $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$ kann g durch $g(0) = -1 \neq 0$ so fortgesetzt werden, dass $g \in H(U_3(0) \setminus \{1\})$.
Nach Vorlesung gilt für die beiden Residuen

$$\operatorname{res}(f,0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z\mathrm{e}^z}{\sin(z)(z-1)} = -1,$$

$$\operatorname{res}(f,1) = \lim_{z\to 1} (z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{\mathrm{e}^z}{\sin(z)} = \frac{\mathrm{e}}{\sin(1)}.$$

f erfüllt die Voraussetzungen des Residuensatzes aus der Vorlesung und somit folgt

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{\sin(z)(z-1)}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(\operatorname{res}(f,0) + \operatorname{res}(f,1)) = 2\pi\mathrm{i}(\frac{\mathrm{e}}{\sin(1)} - 1).$$

b) Wir benutzen den Satz von Gauß. B ist ein beschränkter Normalbereich bezüglich der x-Achse und die reguläre Kurve γ mit $\gamma(t) = \mathrm{e}^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$, deren Spur gerade ∂B ist, ist doppelpunktfrei, geschlossen und so orientiert, dass B links von γ liegt. Bezeichnen wir den Integranden aus der Aufgabe mit $v(x, y)$, so liefert der Satz von Gauß demnach

$$\oint_{\partial B} \mathrm{e}^x \begin{pmatrix} \sin(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix} \cdot \mathrm{d}(x,y) = \int_{\overline{B}} \partial_x v_2(x,y) - \partial_y v_1(x,y) \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\overline{B}} \mathrm{e}^x \cos(y) - \mathrm{e}^x \cos(y) \,\mathrm{d}(x,y) = 0.$$

c) Der Integrand ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$, wenn man ihn in den Punkten $(0, y)$ durch y fortsetzt. Deshalb dürfen wir den Satz von Fubini verwenden, da die Integrationsmenge ein Normalbereich bezüglich der y-Achse ist. Es folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{y \sin(x)}{x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_A \frac{y \sin(x)}{x} \,\mathrm{d}(x,y),$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, y \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant x\}. \end{aligned}$$

Somit lässt sich nochmal der Satz von Fubini anwenden. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \int_A \frac{y \sin(x)}{x} \,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^x \frac{y \sin(x)}{x} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) \,\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{P.I.}}{=} \frac{1}{2} \underbrace{[-x\cos(x)]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} [\sin(x)]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 ((2+5)+3=10 Punkte)

a) Seien die Halbkugeloberfläche H und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,3) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$H := \left\{ \left(x, y, \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}\right) \mid x^2 + y^2 \leqslant 16 \right\}, \qquad f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-3)^2}}.$$

(i) Berechnen Sie für die vorgegebene Parametrisierung g von H den (nicht normierten) Normalenvektor $\partial_x g \times \partial_y g$.

(ii) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_H f(x,y,z) \,\mathrm{d}\sigma$$

durch Einsetzen der Definition, Wechsel zu Polarkoordinaten und schließlich der Substitution des zu f gehörigen Wurzelausdrucks im Nenner.

b) Die Fouriertransformation von $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $h(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, ist nach Vorlesung die Funktion $\mathcal{F}h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{F}h(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$. Errechnen Sie daraus die Fouriertransformation der Funktion

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad j(x) = x\mathrm{e}^{-|x-42|}.$$

Hinweis: Dass j absolut integrierbar ist, muss nicht gezeigt werden.

Lösungsvorschlag

a) (i) Die in der Aufgabe gegebene Parametrisierung ist $g : D := \{x^2 + y^2 \leqslant 16\} \to \mathbb{R}^3$,

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{16 - (x^2 + y^2)} \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\partial_x g(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{16-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}, \qquad \partial_y g(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{\sqrt{16-(x^2+y^2)}} \end{pmatrix}.$$

für $(x, y) \in \{x^2 + y^2 < 16\}$. Somit gilt

$$(\partial_x g \times \partial_y g)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{16-(x^2+y^2)}} \\ \frac{y}{\sqrt{16-(x^2+y^2)}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Zunächst gilt

$$\|(\partial_x g \times \partial_y g)(x, y)\|^2 = \frac{x^2}{16 - (x^2 + y^2)} + \frac{y^2}{16 - (x^2 + y^2)} + 1 = \frac{16}{16 - (x^2 + y^2)}.$$

Per Definition folgt nun, da f außerhalb von $(0, 0, 3)$ und somit auf H stetig ist, dass

$$\begin{aligned}
\int_H f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma &= \int_D f(g(x, y))\,\|(\partial_x g \times \partial_y g)(x, y)\|\,\mathrm{d}(x, y) \\
&= \int_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\sqrt{16 - (x^2 + y^2)} - 3)^2}} \frac{4}{\sqrt{16 - (x^2 + y^2)}}\,\mathrm{d}(x, y) \\
&\overset{\text{PK}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\sqrt{16 - r^2} - 3)^2}} \frac{4}{\sqrt{16 - r^2}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 8\pi \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{r^2 + (\sqrt{16 - r^2} - 3)^2}} \frac{1}{\sqrt{16 - r^2}} r\,\mathrm{d}r \\
&= 8\pi \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{25 - 6\sqrt{16 - r^2}}} \frac{1}{\sqrt{16 - r^2}} r\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $s = \sqrt{25 - 6\sqrt{16 - r^2}}$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} &= \frac{1}{2\sqrt{25 - 6\sqrt{16 - r^2}}} \cdot (-\frac{6 \cdot 2r}{2\sqrt{16 - r^2}})) \\ &= 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{25 - 6\sqrt{16 - r^2}}} \frac{1}{\sqrt{16 - r^2}} r\end{aligned}$$

und somit

$$\int_H f(x,y,z)\, \mathrm{d}\sigma = 8\pi \int_1^5 \frac{1}{3}\, \mathrm{d}s = \frac{32\pi}{3}.$$

b) Es gilt $j(x) = xh(x - 42)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Fouriertransformation von $\tilde{h}$, gegeben durch $\tilde{h}(x) = h(x - 42)$, ist nach Vorlesung gerade

$$\mathcal{F}\tilde{h}(\xi) = \mathrm{e}^{-42\xi\mathrm{i}} \mathcal{F}h(\xi) = \mathrm{e}^{-42\xi\mathrm{i}} \frac{2}{1 + \xi^2}.$$

Sofern wir j als absolut integrierbar voraussetzen, ist $\mathcal{F}j$ nach Vorlesung gegeben durch

$$\mathcal{F}j(\xi) = \mathrm{i}(\mathcal{F}\tilde{h})'(\xi) = \mathrm{i}(-42\mathrm{i}\mathrm{e}^{-42\xi\mathrm{i}} \frac{2}{1 + \xi^2} + \mathrm{e}^{-42\xi\mathrm{i}}(-\frac{4\xi}{(1 + \xi^2)^2})) = -\frac{4\mathrm{e}^{-42\xi\mathrm{i}}}{1 + \xi^2}(21 - \frac{\xi}{1 + \xi^2}\mathrm{i}).$$