Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

SS 2016
19.09.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+4+3=10 Punkte)

Gegeben sei für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und deren zugehörigen algebraischen Vielfachheiten. Bestimmen Sie alle diejenigen Werte von $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, für welche A positiv semi-definit ist.

Für den Rest der Aufgabe sei $(a, b, c) = (5, 3, 4)$.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S, bezüglich welcher $S^{-1}AS$ diagonal ist, und geben Sie $S^{-1}AS$ an.

c) Geben Sie eine positiv-semidefinite Matrix W derart an, dass $W^4 = A$ gilt. Es genügt, W als Produkt von bereits bestimmten Matrizen anzugeben und nachzurechnen, dass tatsächlich $W^4 = A$ gilt.

Aufgabe 2 (2+3+3+2=10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^6)\log(x^2 + y^6) + x & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie die Stetigkeit von f.

b) Bestimmen Sie alle Stellen, in denen f partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

c) Zeigen Sie die Differenzierbarkeit von f.

d) Für welche $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ und für welche $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = (\operatorname{grad} f(0, 0) \mid v)$?

— bitte wenden —

Aufgabe 3 (3+4+3=10 Punkte)

a) Gegeben seien das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, 0\right)$$

sowie der Weg

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (1 - t, 2t, \tanh(t)).$$

Zeigen Sie, dass v ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie $\int_\gamma v(x) \cdot \, dx$.

b) Bestimmen Sie das Volumen, welches durch die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9$ und das Paraboloid $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ im ersten Oktanten, d.h., $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, eingeschlossen wird.

c) Seien $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}(-y, x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Bestimmen Sie $\int_\gamma f(x) \cdot \, dx$.

Aufgabe 4 (3+3+4=10 Punkte)

a) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 3e^{it}$. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{\cos(z)-1}{z^3(z-2)(z-2\pi)} \, dz$.

b) Seien $f, g \in H(\mathbb{C})$ mit $|f| \leq |g|$ auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $\alpha \in \mathbb{C}$ derart existiert, dass $f = \alpha g$ auf $\mathbb{C}$ gilt.
Hinweis: Konstruieren Sie eine beschränkte Hilfsfunktion $h : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) = 0\} \to \mathbb{C}$.

c) Aus der Vorlesung kennen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}g(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$ von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-|x|}$. Bestimmen Sie für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+6x+10}$ die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f$ sowie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 \, dx$.

Viel Erfolg!

Hinweis für nach der Klausur: Ab 17.10.2016 sind die Ergebnisse im Netz verfügbar und am 20.10.2016 findet die Klausureinsicht im Hörsaal neue Chemie statt von 16 Uhr bis 18 Uhr.