Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

SS 2016
19.09.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur

Aufgabe 1 (3+4+3=10 Punkte)

Gegeben sei für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und deren zugehörigen algebraischen Vielfachheiten. Bestimmen Sie alle diejenigen Werte von $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, für welche A positiv semi-definit ist.

Für den Rest der Aufgabe sei $(a, b, c) = (5, 3, 4)$.

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S, bezüglich welcher $S^{-1}AS$ diagonal ist, und geben Sie $S^{-1}AS$ an.

c) Geben Sie eine positiv-semidefinite Matrix W derart an, dass $W^4 = A$ gilt. Es genügt, W als Produkt von bereits bestimmten Matrizen anzugeben und nachzurechnen, dass tatsächlich $W^4 = A$ gilt.

Lösungsvorschlag

a) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$c_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ b & a-\lambda & c \\ 0 & c & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)[(a-\lambda)^2 - c^2] - b^2(a-\lambda) = (a-\lambda)[(a-\lambda)^2 - (b^2+c^2)],$$

wobei wir im zweiten Schritt nach der ersten Zeile (oder Spalte) entwickeln. Die Eigenwerte von A lauten somit $\lambda_1 = a$, $\lambda_{2/3} = a \pm \sqrt{b^2+c^2}$. Da A als symmetrische Matrix diagonalisierbar und Definitheit eine Ähnlichkeitsinvariante ist, ist A genau dann positiv semi-definit, wenn alle Eigenwerte nicht-negativ sind. Das ist genau dann der Fall, wenn $a \geq 0$ und $a^2 \geq b^2 + c^2$ gilt. Gilt $b = c = 0$, so gibt es genau einen Eigenwert, nämlich a, und dieser hat dann algebraische Vielfachheit Drei. Ist $b \neq 0$ oder $c \neq 0$, so gibt es drei paarweise verschiedene Eigenwerte, deren algebraische Vielfachheit jeweils Eins ist.

b) Wir bestimmen zunächst die Eigenräume zu den Eigenwerte

$$E_A(5) \;=\; \mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}\right),$$

$$E_A(5 \pm 5) \;=\; \mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} \mp 5 & 3 & 0 \\ 3 & \mp 5 & 4 \\ 0 & 4 & \mp 5 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right).$$

Definiert man

$$S \;:=\; \begin{pmatrix} \frac{3}{5\sqrt{2}} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

so gilt

$$S^{-1}AS \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Da bei symmetrischen Matrizen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets orthogonal zueinander sind und die Spaltenvektoren von S außerdem normiert sind, ist S tatsächlich eine orthogonale Matrix.

c) Wir definieren

$$W \;:=\; SDS^T$$

mit

$$D \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[4]{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[4]{10} \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir

$$W = (SDS^T)^4 = SD \underbrace{S^T S}_{=I_3} DS^T SDS^T SDS^T = SD^4S^T = S\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}S^T = A$$

mit dem in **b)** Gezeigten. Dabei verwenden wir, dass S eine orthogonale Matrix und daher $S^T = S^{-1}$ ist.

Aufgabe 2 (2+3+3+2=10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^6)\log(x^2+y^6)+x & ,(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeigen Sie die Stetigkeit von f.

b) Bestimmen Sie alle Stellen, in denen f partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

c) Zeigen Sie die Differenzierbarkeit von f.

d) Für welche $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ und für welche $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0) \mid v)$?

Lösungsvorschlag

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen offensichtlich stetig. Sei nun $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}^2$, die gegen $(0,0)$ konvergiere. Ohne Einschränkung gelte $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da sonst $(0,0)$ höchstens ein Häufungswert von $(x_n, y_n)_n$ und damit $0 = f(0,0)$ ein Häufungswert von $(f(x_n, y_n))_n$ ist. Dann definieren wir $z_n := x_n^2 + y_n^6$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und erhalten wegen der stetigen Fortsetzbarkeit von $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, z \mapsto z\log(z)$ in 0

$$\lim_{n\to\infty} z_n \log(z_n) \;=\; 0.$$

Dies lässt sich mithilfe des Mittelwertsatzes oder der Regel von de l'Hospital verifizieren. Insbesondere erhalten wir so

$$f(x_n, y_n) = (x_n^2 + y_n^6)\log(x_n^2 + y_n^6) + x_n \to 0 = f(0,0)$$

im Grenzfall $n \to \infty$.

b) f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition (partiell) differenzierbarer Funktionen selbst (partiell) differenzierbar. Es gelten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x(\log(x^2+y^6)+1)+1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 6y^5(\log(x^2+y^6)+1).
\end{aligned}$$

Außerdem gelten

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(t,0)-0) = \lim_{t\to 0}(2t\log(t)+1) = 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(0,t)-0) = \lim_{t\to 0} 6t^5\log(t) = 0
\end{aligned}$$

wegen dem bereits in **a)** Erwähnten.

c) f ist außerhalb von $(0,0)$ als Komposition differenzierbarer Funktionen selbst wieder differenzierbar. Um die Differenzierbarkeit in $(0,0)$ zu zeigen, bemühen wir **Satz 19.7** der Vorlesung. Dazu zeigen wir also die Stetigkeit der partiellen Ableitungen, um die Differenzierbarkeit in $(0,0)$ zu erhalten. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gelten zunächst mit zu dem oben analogem Argument

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| &= 2|x|\cdot|\log(x^2+y^6)| \leq 4\left|\sqrt{x^2+y^6}\log\sqrt{x^2+y^6}\right| \to 0,\\
\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| &= 6|y|^5\cdot|\log(x^2+y^6)| \leq \frac{36}{5}\left|(x^2+y^6)^{\frac{5}{6}}\log[(x^2+y^6)^{\frac{5}{6}}]\right| \to 0,
\end{aligned}$$

wenn $(x,y) \to 0$. Also sind die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ stetig. **Satz 19.7** liefert nun die Differenzierbarkeit von f in $(0,0)$. Damit ist f differenzierbar.

d) Mit **Satz 19.9** folgt nun wegen $f'(0,0) \neq (0,0)$ für alle $w \in \mathbb{R}^3$ mit $|w| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = (\operatorname{grad} f(0,0) \mid w).$$

Sei $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\}$ nun beliebig. Für $v = 0$ ist die Richtungsableitung nicht wohldefiniert. Dann gilt mit einer leichten Nebenrechnung

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = |v|\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) = |v|(\operatorname{grad} f(0,0) \mid w) = w_x|v| = v_x = (\operatorname{grad} f(0,0) \mid v),$$

wobei $w = (w_x, w_y) = v/|v|$ gesetzt wird. Damit gilt die Gleichheit für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Aufgabe 3 (3+4+3=10 Punkte)

a) Gegeben seien das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2}, 0\right)$$

sowie der Weg

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (1 - t, 2t, \tanh(t)).$$

Zeigen Sie, dass v ein Potentialfeld ist und bestimmen Sie $\int_\gamma v(x) \cdot \, \mathrm{d}x$.

b) Bestimmen Sie das Volumen, welches durch die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9$ und das Paraboloid $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ im ersten Oktanten, d.h., $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, eingeschlossen wird.

c) Seien $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}(-y, x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$. Bestimmen Sie $\int_\gamma f(x) \cdot \, \mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag

a) Definiert man $V(x_1, x_2, x_3) := \frac{1}{2}\log(1 + x_1^2 + x_2^2)$, so gilt offensichtlich $\operatorname{grad} V = v$ auf $\mathbb{R}^3$. Dann folgt mit **Satz 19.23**

$$\int_\gamma v(x) \cdot \, \mathrm{d}x = \int_\gamma \operatorname{grad} V(x) \cdot \, \mathrm{d}x = V(\gamma(1)) - V(\gamma(0)) = V((0, 2, \tanh(1))) - V((1,0,0)) = \frac{1}{2}\log(\frac{5}{2}).$$

Man hätte hier auch die Integrabilitätsbedingungen nachrechnen können und dann wegen der Wegunabhängigkeit des Integrals einen anderen Weg mit demselben Anfangs- und Endpunkt wählen können.

b) Das beschriebene Volumen erhält man mithilfe

$$\int_{[0,9]^3} c_{\{0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq x_3 \leq 9, x_1, x_2 \geq 0\}} \, \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_{r^2}^9 \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\phi \right) r \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \int_0^3 (9r - r^3) \, \mathrm{d}r = \frac{81\pi}{8}.$$

c) Wir erhalten direkt

$$\int_\gamma f(z) \cdot \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Aufgabe 4 (3+3+4=10 Punkte)

a) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 3e^{it}$. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{\cos(z)-1}{z^3(z-2)(z-2\pi)}$.

b) Seien $f, g \in H(\mathbb{C})$ mit $|f| \le |g|$ auf $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass eine Konstante $\alpha \in \mathbb{C}$ derart existiert, dass $f = \alpha g$ auf $\mathbb{C}$ gilt.
Hinweis: Konstruieren Sie eine beschränkte Hilfsfunktion $h : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) = 0\} \to \mathbb{C}$.

c) Aus der Vorlesung kennen Sie die Fouriertransformierte $\mathcal{F}g(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$ von $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-|x|}$. Bestimmen Sie für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2+6x+10}$ die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f$ sowie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 \, dx$.

Lösungsvorschlag

a) Definiere

$$f : U_4(0) \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\cos(z) - 1}{z^3(z-2)(z-2\pi)}\, dz$$

Dann ist f holomorph und $\mathrm{Bild}(\gamma) \subseteq U_4(0)$ und $U_4(0)$ offen. Die isolierten Singularitäten von f (in $U_4(0)$) lauten also 0 und 2. Die zugehörigen Residuen ergeben sich mithilfe von **Aufgabe 73 a)** zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{res}(f, 0) &= \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos(z)-1}{z^2(z-2)(z-2\pi)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} = -\frac{1}{8\pi}, \\
\mathrm{res}(f, 2) &= \lim_{z\to 2} (z-2) f(z) = \lim_{z\to 2} \frac{\cos(z)-1}{z^3(z-2\pi)} = -\frac{\cos(2)-1}{16(1-\pi)},
\end{aligned}$$

wie man z.B. mithilfe der Potenzreihenentwicklung von cos um 0 einsieht. Da die Windungszahlen von γ um 0 bzw. 2 jeweils Eins sind, liefert uns der Residuensatz

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)-1}{z^3(z-2)(z-2\pi)}\, dz = -2\pi i \left(\frac{1}{8\pi} + \frac{1-\cos(2)}{16(\pi - 1)} \right).$$

b) Zunächst einmal stellen wir fest, dass im Falle, dass g die konstante Nullfunktion ist, f wegen $|f| \le |g|$ ebenfalls die konstante Nullfunktion sein muss. Wegen der Holomorphie besitzt g nur isolierte Nullstellen, da sonst g wegen des Identitätssatzes bereits die konstante Nullfunktion sein müsste. Insbesondere besitzt $\frac{1}{g}$ und damit auch $h := \frac{f}{g}\big|_{\{g \neq 0\}}$ nur isolierte Singularitäten und ist als Quotient holomorpher Funktionen selbst holomorph. Da die Singularitäten von h isoliert sind, existiert insbesondere um jede solche eine kleine Umgebung, in der keine weitere Singularität enthalten ist. Auf diesen Umgebungen gilt nach Voraussetzung

$$|h| = \left| \frac{f}{g} \right| \le 1.$$

Der **Riemannsche Hebbarkeitssatz** liefert nun, dass h sich zu einer holomorphen Funktion $H \in H(\mathbb{C})$ fortsetzen lässt, für welche wegen der Stetigkeit $|H| \le 1$ auf ganz $\mathbb{C}$ gilt. Nach dem **Satz von Liouville** ist H konstant. Insbesondere existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ derart, dass $f = \alpha g$ auf $\{g \neq 0\}$ gilt. Wegen $|f| \le |g|$ sind aber Nullstellen von g auch immer Nullstellen von f, weswegen wir die Gleichheit $f = \alpha g$ auf ganz $\mathbb{C}$ erhalten.

c) Zunächst einmal gilt

$$f(x) = \frac{1}{(x+3)^2 + 1} = \frac{1}{2} \mathcal{F}g(x+3).$$

Bekanntermaßen sind g und $\mathcal{F}g$ absolut integrierbar, wodurch die Voraussetzungen der **Inversionsformel** erfüllt sind. Dann gilt wie in **Aufgabe 76 d)**

$$g(x) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{ix\xi}(\mathcal{F}g)(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(\mathcal{F}g)(-x).$$

Damit und mit dem Verschiebungssatz **23.4** und der Linearität der Fouriertransformation erhalten wir

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{3\xi i}}{2}\mathcal{F}(\mathcal{F}g)(\xi) = \pi\mathrm{e}^{3\xi i-|\xi|}.$$

Mit dem **Satz von Plancherel** gilt außerdem

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{F}f(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}\,\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{\infty} e^{-2|x|}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$