Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

SS2017
18.09.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Modulprüfung

Aufgabe 1 [5+5=10 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

genau dann diagonalisierbar ist, wenn $\alpha = 0$ ist.

(b) Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix B^{42}.

Aufgabe 2 [8+2=10 Punkte]

Gegeben sei die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0\},$$

sowie das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x(y^2 + z^2) \\ y(x^2 + z^2) \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Berechnen Sie den Fluss

$$\iint_M \vec{F} \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}o$$

des Vektorfeldes $\vec{F}$ aus M, wobei $\vec{N}$ das äußere Einheitsnormalenfeld von M bezeichnet.

(b) Seien γ_1 und γ_2 reguläre Kurven in $\mathbb{R}^3$, die im Ursprung starten und im Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ enden. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3 [5+3+2=10 Punkte]

Sei $f(x,y) := 12y^5 - 20xy^3 + 5x^4$ für $x, y > 0$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extrema von f auf der Menge

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

(b) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \left\{\left(\frac{4}{\sqrt[3]{25}}, \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right)\right\}$ eine Lösung der Gleichung $f(x,y) = 0$. Zeigen Sie, dass es offene Intervalle U, V mit $x_0 \in U$ und $y_0 \in V$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$, gibt mit $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$.

(c) In welchem Punkt $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \left\{\left(\frac{4}{\sqrt[3]{25}}, \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right)\right\}$ mit $f(x_1, y_1) = 0$ gilt für die implizit durch $f(x,y) = 0$ definierte Auflösung $y = g(x)$ nach y, dass $g'(x_1) = 0$?

Aufgabe 4 [5+5=10 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und berechnen Sie damit den Wert des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x.$$

(b) Gegeben sei die Funktion

$$h(z) := \prod_{k=0}^{2017} \frac{1}{z - 2k}.$$

Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq -1$ den Wert des Integrals

$$\int_\gamma \frac{h(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z,$$

wobei γ den positiv orientierten Rand der Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **19.10.2017** im Internet, sowie durch Aushang am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 des Gebäudes 20.30 bekannt gegeben.
- Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **25.10.2017**, zwischen **16:00** und **18:00** im Hörsaal am Fasanengarten statt.
- Mündliche Nachprüfungen finden in der Woche vom **30.10.** bis **03.11.2017** im Gebäude 20.30 statt.