Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

SS2017
18.09.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Modulprüfung

Aufgabe 1 [5+5=10 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

genau dann diagonalisierbar ist, wenn $\alpha = 0$ ist.

(b) Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrix B^{42}.

Lösungsvorschlag

(a) Die Matrix A_0 ist schon in Diagonalgestalt, also insbesondere diagonalisierbar.

Sei also $\alpha \neq 0$. Das charakteristische Polynom der Matrix A_α ist gegeben durch

$$p_\alpha(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

Man sieht, dass die Matrix A_α die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 1 besitzt.

Offensichtlich ist $(0,0,1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_2, und da die geometrische Vielfachheit immer kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit ist, muss der Eigenraum zum Eigenwert λ_2 der eindimensionale Unterraum aufgespannt von $(0,0,1)$ sein.

Weiter ist

$$\ker(A_\alpha - I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ_1 ist also gegeben durch

$$\dim \ker(A_\alpha - I) = 1.$$

Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit ungleich der algebraischen Vielfachheit. Damit ist die Matrix A_α für $\alpha \neq 0$ nicht diagonalisierbar.

(b) Setze

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist O eine orthogonale Matrix (da die Zeilen aufeinander orthonormal sind, d.h. $O^{-1} = O^T = O$) aus Eigenvektoren von B.

Wegen $Bv_1 = 4v_1 =: \lambda_1 v_1$ und $Bv_2 = 2v_2 =: \lambda_2 v_2$ gilt nach dem Spektralsatz für symmetrische Matrizen, dass

$$B = O \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} O^T := ODO^T.$$

Damit erhalten wir wegen $O^T O = I$,

$$\begin{aligned} B^{42} &= \left[ODO^T\right]^{42} = ODO^T ODO^T O \cdots O^T ODO^T = OD^{42}O^T \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{42} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda_1^{42} + \lambda_2^{42}) & \frac{1}{2}(\lambda_1^{42} - \lambda_2^{42}) \\ \frac{1}{2}(\lambda_1^{42} - \lambda_2^{42}) & \frac{1}{2}(\lambda_1^{42} + \lambda_2^{42}) \end{pmatrix} \\ &= 2^{41} \begin{pmatrix} 2^{42} + 1 & 2^{42} - 1 \\ 2^{42} - 1 & 2^{42} + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alternativ: Man berechnet

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \\ B^3 &= 4 \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \\ B^4 &= 8 \begin{pmatrix} 17 & 15 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}, \ldots \end{aligned}$$

und vermutet die allgemeine Formel

$$B^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2^n + 1 & 2^n - 1 \\ 2^n - 1 & 2^n + 1 \end{pmatrix},$$

welche per Induktion (korrekte Ausführung des Induktionsbeweises) gezeigt werden kann. Damit erhält man

$$B^{42} = 2^{41} \begin{pmatrix} 2^{42} + 1 & 2^{42} - 1 \\ 2^{42} - 1 & 2^{42} + 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 [8+2=10 Punkte]

Gegeben sei die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0\},$$

sowie das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x(y^2 + z^2) \\ y(x^2 + z^2) \\ z(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Berechnen Sie den Fluss

$$\iint_M \vec{F} \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}o$$

des Vektorfeldes $\vec{F}$ aus M, wobei $\vec{N}$ das äußere Einheitsnormalenfeld von M bezeichnet.

(b) Seien γ_1 und γ_2 reguläre Kurven in $\mathbb{R}^3$, die im Ursprung starten und im Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ enden. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Lösungsvorschlag

(a) Wir definieren die Menge

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1, \ z \geq 0\}.$$

Dann gilt $\partial G = M \cup D$ wobei $D = \{(x, y, 0) \mid 2x^2 + 2y^2 \leq 1\}$.

Die Parametrisierung von D durch $(\rho, \phi) \mapsto (\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi), 0), \ \phi \in [0, 2\pi), \ \rho \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ ist regulär mit äußerer Einheitsnormale $N(\rho, \phi) = (0, 0, -1)$, und man berechnet

$$\iint_D \vec{F} \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}o = 0.$$

Wendet man nun den Satz von Gauß (Divergenzsatz) auf die Menge G an, so folgt

$$\begin{aligned} \iint_M \vec{F} \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}o &= \iint_M \vec{F} \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}o + \iint_D \vec{F} \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}o \\ &= \iint_{\partial G} \vec{F} \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}o = \iiint_G \nabla \cdot \vec{F} \, \mathrm{d}(x, y, z) = \iiint_G \|\cdot\|^2 \mathrm{d}(x, y, z). \end{aligned}$$

Somit liefert die Rechnung (mit dem Prinzip projezierbarer Mengen)

$$\begin{aligned} \iiint_G \|\cdot\|^2 \, \mathrm{d}(x, y, z) &= \int_0^1 \int_{\{x^2+y^2 \leq \frac{1-z^2}{2}\}} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \, \mathrm{d}(x, y) \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^{\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}} (r^2 + z^2) r \, \mathrm{d}r \mathrm{d}z = \frac{\pi}{8} \int_0^1 \left(1 + 2z^2 - 3z^4\right) \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

den gesuchten Fluss $\iint_M \vec{F} \cdot \vec{N} \, \mathrm{d}o = \frac{2\pi}{15}$.

(b) Es ist

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2yz - 2yz \\ 2xz - 2xz \\ 2xy - 2xy \end{pmatrix} = \vec{0}$$

auf $\mathbb{R}^3$. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt daher für den geschlossenen Weg $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ vom Ursprung entlang γ_1 nach (x_0, y_0, z_0) und (rückwärts) entlang γ_2 zum Ursprung zurück,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} - \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0,$$

und damit gilt auch die behauptete Gleichheit.

Alternativ: Man sieht sehr leicht, dass $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{4}\left(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2\right), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

ein Potentialfeld zu $\vec{F}$ ist, also $\vec{f} = \nabla\Phi$.

Dann gilt aber schon

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \Phi(x_0, y_0, z_0) - \Phi(0,0,0) = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}.$$

Aufgabe 3 [5+3+2=10 Punkte]

Sei $f(x,y) := 12y^5 - 20xy^3 + 5x^4$ für $x, y > 0$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extrema von f auf der Menge

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

(b) Sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \left\{\left(\frac{4}{\sqrt[3]{25}}, \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right)\right\}$ eine Lösung der Gleichung $f(x,y) = 0$. Zeigen Sie, dass es offene Intervalle U, V mit $x_0 \in U$ und $y_0 \in V$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$, gibt mit $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$.

(c) In welchem Punkt $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \left\{\left(\frac{4}{\sqrt[3]{25}}, \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right)\right\}$ mit $f(x_1, y_1) = 0$ gilt für die implizit durch $f(x,y) = 0$ definierte Auflösung $y = g(x)$ nach y, dass $g'(x_1) = 0$?

Lösungsvorschlag

(a) Gradient und Hessematrix der Funktion f sind gegeben durch

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -20y^3 + 20x^3 \\ 60y^4 - 60xy^2 \end{pmatrix}$$

und

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 60x^2 & -60y^2 \\ -60y^2 & 240y^3 - 120xy \end{pmatrix}.$$

Kandidaten für lokale Extremstellen von f für $x, y > 0$ sind Nullstellen des Gradienten, also Lösungen des nichtlinearen Gleichungssystems

$$20x^3 - 20y^3 = 0 \qquad \text{(I)}$$
$$60y^4 - 60xy^2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

mit $x, y > 0$. Aus Gleichung (I) erhält man direkt $x = y$, und somit eingesetzt in Gleichung (II), $x = y = 1$.

Da die Hessematrix von f an der Stelle $(1,1)$,

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 60 & -60 \\ -60 & 120 \end{pmatrix},$$

wegen $\det H_f(1,1) = 60 \cdot 120 - 60 \cdot 60 = 60 \cdot 60 > 0$ und $\operatorname{spur} H_f(1,1) = 60 + 120 > 0$ nur positive Eigenwerte besitzen kann, ist $H_f(1,1)$ positiv definit .

Die Funktion f hat daher auf der Menge $x, y > 0$ ein lokales Minimum in $(1,1)$ (mit Wert $f(1,1) = -3$).

(b) Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen existiert eine lokale Auflösung der Gleichung $f(x_0, y_0) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$ nach y, falls $\partial_y f(x_0, y_0) \neq 0$.

Nun ist $\partial_y f(x,y) = 0$ genau dann, wenn

$$60y^4 = 60xy^2,$$

also $x = y^2$.

Zusammen mit der Bedingung $f(x,y)=0$ erhalten wir

$$0 = f(y^2, y) = 12y^5 - 20y^5 + 5y^8,$$

mit der Lösung ($y > 0$!) $y_* = \sqrt[3]{\frac{8}{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$. Damit ist der Punkt $(x_*, y_*) = (y_*^2, y_*) = \left(\frac{4}{\sqrt[3]{25}}, \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right)$ der einzige Punkt auf der Niveaulinie $f(x,y) = 0$, in dem die lokale Auflösbarkeit nach dem Satz über implizit definierte Funktionen nicht garantiert ist.

(c) Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen (bzw. der Kettenregel) gilt

$$g'(x) = -\frac{\partial_x f(x,y)}{\partial_y f(x,y)} = \frac{20y^3 - 20x^3}{60y^4 - 60xy^2}$$

und damit $g'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = y$. Zusammen mit

$$0 = f(x, g(x)) = f(x,x) = 12x^5 - 20x^4 + 5x^4 = 12x^5 - 15x^4$$

folgt damit $x_1 = \frac{5}{4} = y_1$.

Aufgabe 4 [5+5=10 Punkte]

(a) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und berechnen Sie damit den Wert des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \mathrm{d}x.$$

(b) Gegeben sei die Funktion

$$h(z) := \prod_{k=0}^{2017} \frac{1}{z - 2k}.$$

Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq -1$ den Wert des Integrals

$$\int_{\gamma} \frac{h(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

wobei γ den positiv orientierten Rand der Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Lösungsvorschlag

(a) Es ist

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x = 4,$$

und für $\xi \neq 0$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi} - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\xi}}{-\mathrm{i}\xi} = 2\frac{\sin(2\xi)}{\xi} = 4\frac{\sin(2\xi)}{2\xi}.$$

Da nun die Funktion f absolut integrierbar ist und weiter

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}x = 4 < \infty$$

gilt, können wir den Satz von Plancherel anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} 4 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(4\frac{\sin(2\xi)}{2\xi} \right)^2 \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(2\xi)}{2\xi} \right)^2 \mathrm{d}(2\xi) = \frac{4}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \xi}{\xi} \right)^2 \mathrm{d}\xi = \pi.$$

(b) Die Funktion h hat isolierte Polstellen 1. Ordnung bei

$$z_k = 2k, \quad k = 0, \dots, 2017,$$

und ist sonst holomorph.

Wir schreiben $h(z) = z^{-1} \prod_{k=1}^{2017} \frac{1}{z-2k} = z^{-1} g(z)$ mit einer Funktion g, die holomorph auf der offenen und einfach zusammenhängenden Menge $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{3}{2}\}$ ist. γ ist eine einfach geschlossene und positiv orientierte Kurve in G.

Insbesondere ist $\frac{h(z)}{z^{n+1}} = z^{-n} g(z)$ holomorph auf G für $n < -1$, und damit gilt nach dem Cauchy-Integralsatz

$$\int_\gamma \frac{h(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = 0$$

in diesem Fall.

Für $n = -1$ folgt mit der Cauchy-Integralformel

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{h(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z &= \int_\gamma h(z) \, \mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{g(z)}{z} \, \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \mathrm{i} g(0) = 2\pi \mathrm{i} \prod_{k=1}^{2017} \frac{1}{-2k} = -\frac{2\pi \mathrm{i}}{2^{2017} 2017!} = -\frac{\pi \mathrm{i}}{2^{2016} 2017!} \quad . \end{aligned}$$

Alternativ: Mit Residuensatz: Sei $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{3}{2}\}$. Dann ist G einfach zusammenhängend und γ ist eine einfach geschlossene und positiv orientierte Kurve in G. h ist holomorph auf $G \setminus \{0\}$ und $z_0 = 0$ liegt innerhalb der Kurve γ.

Für $n = -1$ gilt damit nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{h(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z &= \int_\gamma h(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}(h, 0) = 2\pi \mathrm{i} \lim_{z \to 0} z h(z) \\ &= 2\pi \mathrm{i} \prod_{k=1}^{2017} \frac{1}{-2k} = -\frac{2\pi \mathrm{i}}{2^{2017} 2017!} = -\frac{\pi \mathrm{i}}{2^{2016} 2017!} \quad . \end{aligned}$$

Da h einen Pol erster Ordnung bei $z_0 = 0$ hat, beginnt die Laurentreihenentwicklung mit dem -1 Term (d.h. der Hauptteil der Laurenreihe besteht nur aus dem -1 Term). Insbesondere verschwindet der Hauptteil der Laurenreihenentwicklung von $\frac{h(z)}{z^{n+1}}$ für $n < -1$ (mit anderen Worten, die Singularität bei $z_0 = 0$ von $\frac{h(z)}{z^{n+1}}$ ist hebbar). Damit ist das Residuum an der Stelle $z_0 = 0$ in diesem Fall gegeben durch $\operatorname{Res}(\frac{h(z)}{z^{n+1}}, 0) = 0$ und es folgt mit dem Residuensatz

$$\int_\gamma \frac{h(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z = 0.$$