Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Klausur

Aufgabe 1: (8 + 8 + 4 = 20 Punkte) In dieser Aufgabe sind numerische Fehler nicht erlaubt. Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte λ_A von A und ihre algebraischen Vielfachheiten $m_a(\lambda)$.

(b) Bestimmen Sie für die Eigenwerte $\lambda_A = -\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 2$ ihre geometrische Vielfachheit $m_g(\lambda)$, sowie den zugehörigen Eigenraum $E_A(\lambda_A)$.

(c) Ist A diagonalisierbar? Geben Sie ggf. eine reguläre Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 2: (10 + 10 = 20 Punkte)

(a) Es sei $V = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2, f \text{ ist stetig}\}$ der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen von $[-\pi, \pi]$ nach $\mathbb{R}^2$ und $p_j \in V$ definiert durch

$$p_1(x) := \begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p_2(x) := \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$
$$p_3(x) := \begin{pmatrix} -\cos x \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad p_4(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ durch

$$\langle p, q \rangle_V = \int_{-\pi}^{\pi} \langle p(y), q(y) \rangle_{\mathbb{R}^2} \, \mathrm{d}y$$

für alle $p, q \in V$ erklärt, wobei $\langle a, b \rangle_{\mathbb{R}^2}$ das Euklidsche Skalarprodukt von zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ ist. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ auf p_1, p_2, p_3, p_4 an.

(b) Seien $X = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $Y = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ zwei Basen von $\mathbb{C}^3$. Schreiben Sie die Identität Abbildung $Ix = x$ in Matrixform als ${}^X I^Y : \mathrm{Lin}(X) \to \mathrm{Lin}(Y)$.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: (8 + 12 = 20 Punkte) Berechnen Sie die globalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = 5x + y - 3z$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ auf den folgenden Mengen:

(a) $W = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\right\}$.

(b) $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y + z = 0) \wedge (x^2 + y^2 + z^2 = 1)\right\}$.

Aufgabe 4: (10 + 10 = 20 Punkte)

(a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich des folgendes Integrales, und berechnen Sie den Integralwert

$$\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{x^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y\,.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_B (xy + yz + zx) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z, \quad B = \left\{(x, y, z) : x, y, z \geq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:
Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Dienstag, den **16.10.2018**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) veröffentlicht.
Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **18.10.2018**, von **16 bis 18 Uhr** in der **Hörsaal Neue Chemie (Geb. 30.46)** statt.
Die mündlichen Nachprüfungen finden in der Woche von 22.10. bis 27.10 statt.