Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger

SS 2019
30.08.2019

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (5+7+4+4=20 Punkte)

Für $\beta \geqslant 1$ sei die Matrix A_β gegeben durch

$$A_\beta = \begin{pmatrix} \beta & \beta+2 \\ \beta-1 & \beta \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_β für alle $\beta \geqslant 1$.

b) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A_β den dazugehörigen Eigenraum an.

c) Für welche Werte von β ist A_β diagonalisierbar? Bestimmen Sie für diese Fälle eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, sodass $S^{-1}A_\beta S$ eine Diagonalmatrix ist und geben Sie diese Diagonalmatrix an.

d) Berechnen Sie A_2^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (6+7+7=20 Punkte)

a) Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\{u_1, u_2, u_3\}$ von $\mathrm{lin}\{v_1, v_2, v_3\}$, wobei u_1 ein Vielfaches von v_1 sein soll.

b) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten der (ungeraden) Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} -\pi & , t \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ t - \frac{\pi}{2} & , t \in [-\frac{\pi}{2}, 0), \\ t + \frac{\pi}{2} & , t \in [0, \frac{\pi}{2}), \\ \pi & , t \in [\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Geben Sie die Fourierreihe und ihren Wert an. Wo stellt sie die Funktion f dar?

c) Berechnen Sie die Stammfunktion des Potentialfeldes $f : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\} \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{y}{z}\right) \\ \frac{(x+y)z}{y^2+z^2} + \arctan\left(\frac{y}{z}\right) \\ -\frac{(x+y)y}{y^2+z^2} \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 3 ((4+6)+(4+6)=20 Punkte)

a) Die Funktion $f : S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \pi\} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sin^2(x)+y^4} & ,(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in S$, in denen f stetig ist.

(ii) Berechnen Sie, wo möglich, die partiellen Ableitungen von f. Wo ist f differenzierbar?

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{\frac{1}{2}-x^2-y^2}(x+y)$.

(i) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f.

(ii) Untersuche Sie f auf lokale und globale Extrema und geben Sie diese an.

Aufgabe 4 (5+7+8=20 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{e^{-1}} \int_e^{\min\{e^2,\frac{1}{y}\}} \cos\left(\frac{\pi \log(x)}{2}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

b) Berechnen Sie das Volumen (bzw. den Flächeninhalt) von

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, 0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (4x+y)^{2/3}\}$$

mit Hilfe von Polarkoordinaten.

c) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = 2e^{it}$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{e^z - 1}{z^2(z-1)^2} \mathrm{d}z.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab dem **14.10.2019**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 im Mathematik-Gebäude 20.30 aus.

Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **17.10.2019**, von 16 bis 18 Uhr in Daimler Hörsaal (Geb. 10.21) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind vom **21.10.2019** bis **31.10.2019**.