Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Modulprüfung

Aufgabe 1 (7+6+7=20 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $A_\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha - 2 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α diagonalisierbar ist.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $B^n = A_3$ ist.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A_3 = SDS^{-1}$.

Aufgabe 2 (10+(5+5)=20 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - xy^2 + 12x + 2z.$$

b) Gegeben sei die Funktion $f\colon (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \log(1+x+y)}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(ii) Ist f im Punkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar?

-bitte wenden-

Aufgabe 3 (10+10=20 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\int_A y \, \mathrm{d}(x, y, z), \quad \text{wobei } A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in [0, 1],\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq z\}.$$

Hinweis: Zylinderkoordinaten.

b) Sei für $a, b > 0$ die Menge E das von der Kurve

$$\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (a\cos(t), b\sin(t))$$

berandete beschränkte Gebiet.
Berechnen Sie $|\overline{E}|$ mit Hilfe eines geeigneten Vektorfeldes $v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und des Integralsatzes von Gauß im $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 ((4+6)+10=20 Punkte)

a) Es sei $\gamma(t) := 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie

$$\text{(i)} \int_\gamma \frac{\sin(z)}{z - i} \, \mathrm{d}z, \qquad \text{(ii)} \int_\gamma z^n e^{1/z} \, \mathrm{d}z \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis zu (ii): Bestimmen Sie zunächst die Laurentreihe von $e^{1/z}$ um $z_0 = 0$ und wenden Sie den Residuensatz an.

b) Seien $f, g \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$\lim_{|z| \to \infty} |f(z) - g(z)| = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $f = g$ sein muss.
Hinweis: Satz von Liouville.

Viel Erfolg!