Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Modulprüfung

Aufgabe 1 (7+6+7=20 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $A_\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha - 2 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix A_α diagonalisierbar ist.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $B^n = A_3$ ist.
Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A_3 = SDS^{-1}$.

Lösungsvorschlag:

a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\begin{aligned} p_{A_\alpha}(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \alpha - 2 \\ 0 & 1 & \alpha - 1 - \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &\overset{(*)}{=} (3-\lambda) \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & \alpha - 2 \\ 1 & \alpha - 1 - \lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (3-\lambda)\left[(2-\lambda)(\alpha-1-\lambda) - \alpha + 2\right] \\ &= (3-\lambda)\left[\lambda^2 - (\alpha+1)\lambda + \alpha\right] \\ &= (3-\lambda)(1-\lambda)(\alpha-\lambda). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Determinante in $(*)$ nach der ersten Spalte (bzw. Zeile) entwickelt. Da die Nullstellen von p_{A_α} genau die Eigenwerte von A_α sind, sehen wir, dass $1, 3, \alpha$ die Eigenwerte von A_α sind.

b) Ist $\alpha \notin \{1, 3\}$, so sind die Eigenwerte von A_α paarweise verschieden und A_α somit diagonalisierbar. In den Fällen $\alpha = 1$ bzw. $\alpha = 3$ ergeben sich doppelte Eigenwerte (genauer: Eigenwerte mit algebraischer Vielfachheit zwei), und wir müssen dann in diesen Fällen untersuchen, ob die geometrische Vielfachheit des doppelten Eigenwertes auch zwei ist.

$\alpha = 1$: In diesem Fall ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 1$ zwei. Es ist

$$A_1 - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\; | \cdot (-1) \;\; = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Hieraus ergibt sich

$$\mathrm{Eig}_{A_1}(1) = \mathrm{Kern}(A_1 - I) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Also ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 1$ echt kleiner seine algebraische Vielfachheit. Daher ist A_1 nicht diagonalisierbar.

$\alpha = 3$: Falls $\alpha = 3$ ist, ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 3$ gleich zwei. Es ist

$$A_3 - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \;\; = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Hieraus ergibt sich

$$\mathrm{Eig}_{A_3}(3) = \mathrm{Kern}(A_3 - 3I) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Also entspricht die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes $\lambda = 3$ seiner algebraischen Vielfachheit. Daher ist A_3 diagonalisierbar.
Alternative Argumentation: A_3 ist symmetrisch, also nach dem Spektralsatz insbesondere diagonalisierbar.

Zusammengefasst ist also A_α für alle $\alpha \neq 1$ diagonalisierbar.

c) Wir bestimmen zunächst eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $A_3 = SDS^{-1}$ gilt. Nach Aufgabenteil a) hat A_3 die Eigenwerte $1, 3, 3$. Wir bestimmen nun die zugehörigen Eigenräume. Es ist

$$A_3 - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\; | \cdot (-1) \;\; = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Es folgt

$$\mathrm{Eig}_{A_3}(1) = \mathrm{Kern}(A_3 - I) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Für den Eigenraum $\mathrm{Eig}_{A_3}(3)$ gilt (vgl. Lösungen zum Aufgabenteil b))

$$\mathrm{Eig}_{A_3}(3) = \mathrm{Kern}(A_3 - 3I) = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Definieren wir die (orthogonale) Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und die Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ durch

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

so folgt $A_3 = SDS^{-1}$.
Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $D^{\frac{1}{n}} := \mathrm{diag}(1, 3^{\frac{1}{n}}, 3^{\frac{1}{n}})$ und

$$B := SD^{\frac{1}{n}}S^{-1}.$$

Dann gilt

$$B^n = \left(SD^{\frac{1}{n}}S^{-1}\right)^n = S\left(D^{\frac{1}{n}}\right)^n S^{-1} = SDS^{-1} = A.$$

Also erfüllt B die gewünschte Gleichung. B ist explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} B =& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{\frac{1}{n}} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\,3^{1/n} & 0 \\ -1 & 0 & 3^{\frac{1}{n}} \\ 1 & 0 & 3^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\,3^{\frac{1}{n}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + 3^{\frac{1}{n}} & -1 + 3^{\frac{1}{n}} \\ 0 & -1 + 3^{\frac{1}{n}} & 1 + 3^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (10+(5+5)=20 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - xy^2 + 12x + 2z.$$

b) Gegeben sei die Funktion $f\colon (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \log(1+x+y)}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ für $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(ii) Ist f im Punkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar?

Lösungsvorschlag:

a) Wir bestimmen zunächst die stationären Punkte von f:

$$f_x(x,y,z) = 2x - y^2 + 12 \stackrel{!}{=} 0 \tag{1}$$

$$f_y(x,y,z) = 4y - 2xy = 2y(2-x) \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$

$$f_z(x,y,z) = 2z + 2 = 2(z+1) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad z = -1. \tag{3}$$

Ist $y = 0$, so folgt aus (1), dass $x = -6$ ist. In diesem Fall ist also $(-6, 0, -1)$ der einzige stationäre Punkt.

Ist hingegen $y \neq 0$, so folgt aus (2), dass $x = 2$ ist. Setzen wir dies in (1) ein, erhalten wir die Gleichung $y^2 = 16$, also $y = \pm 4$. Also sind in diesem Fall $(2, \pm 4, -1)$ die einzigen stationären Punkte. Insgesamt sind also

$$(-6, 0, -1), (2, 4, -1), (2, -4, -1)$$

die stationären Punkte von f.

Die Hessematrix von f in einem Punkt $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -2y & 0 \\ -2y & 4-2x & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$Hf(-6,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat nur die strikt positiven Eigenwerte 2 und 16 und ist daher positiv definit. Somit hat f in $(6, 0, -1)$ ein lokales Minimum. Andererseits sind die Matrizen

$$Hf(2, \pm 4, -1) = \begin{pmatrix} 2 & \mp 8 & 0 \\ \mp 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: A_\pm$$

indefinit, da wegen

$$\begin{aligned} p_{A_\pm}(\lambda) = \det(A_\pm - \lambda I) &= (2-\lambda)[(2-\lambda)(-\lambda) - 64] \\ &= (2-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 64] = 0 \\ &\Longleftrightarrow \lambda = 2 \text{ oder } \lambda = 1 \pm \sqrt{65} \end{aligned}$$

die Matrizen $A_\pm$ jeweils einen positiven und negativen Eigenwert haben (nämlich $1 \pm \sqrt{65}$).

Also hat f in den Punkten $(2, \pm 4, -1)$ kein Extremum.

Zusammengefasst hat also f nur im Punkt $(-6, 0, -1)$ ein lokales Extremum.

b) (i) Sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann ist für $t \neq 0$

$$\frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = \frac{f(tv)}{t} = \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2} \frac{\log(1 + t(v_1 + v_2))}{t}. \tag{4}$$

Nach der Regel von de L'Hospital ist

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1 + t(v_1 + v_2))}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(v_1 + v_2)}{1 + t(v_1 + v_2)} = (v_1 + v_2).$$

Führen wir in (4) den Grenzübergang $t \to 0$ durch, erhalten wir daher

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2}(v_1 + v_2).$$

(ii) Angenommen, f wäre in $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Dann müsste

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = f'(0,0) \cdot v \tag{5}$$

für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gelten. Wir weisen im Folgenden nach, dass dies nicht sein kann. Nach Aufgabenteil a) gilt

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(0,0) = 1 \quad \text{und} \quad f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(0,0) = 0,$$

also

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} f_x(0,0) & f_y(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus Aufgabenteil a) und (5) erhalten wir daher für alle $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $v_1, v_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{v_1^2}{v_1^2 + v_2^2}(v_1 + v_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \\ \iff v_1(v_1 + v_2) &= v_1^2 + v_2^2 \\ \iff v_2(v_1 - v_2) &= 0 \\ \iff v_1 &= v_2. \end{aligned}$$

Also ist (5) nur für alle $v \in \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \colon v_1 = v_2 \text{ oder } v_1 = 0 \text{ oder } v_2 = 0\} \subsetneq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ erfüllt. Folglich kann f im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ nicht differenzierbar sein.

Aufgabe 3 (10+10=20 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\int_A y \,\mathrm{d}(x,y,z), \quad \text{wobei } A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \in [0,1],\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq z\}.$$

Hinweis: Zylinderkoordinaten.

b) Sei für $a, b > 0$ die Menge E das von der Kurve

$$\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) := (a\cos(t), b\sin(t))$$

berandete beschränkte Gebiet.

Berechnen Sie $|\overline{E}|$ mit Hilfe eines geeigneten Vektorfeldes $v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und des Integralsatzes von Gauß im $\mathbb{R}^2$.

Lösungsvorschlag:

a) Sei

$$g\colon [0,\infty)\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(r,\varphi,z)=(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$

die Zylinderkoordinatenabbildung. Dann gilt $A=g(B)$, wobei

$$B:=\left\{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3\colon (\varphi,z)\in[0,\pi]\times[0,1], 0\le r\le\sqrt{z}\right\}$$

ein Normalbereich im $\mathbb{R}^3$ ist. Da g auf $\mathring{B}$ injektiv ist und $\det g'(r,\varphi,z)=r\neq 0$ für alle $(r,\varphi,z)\in\mathring{B}$ gilt, folgt aus der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_A y\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_B r\sin(\varphi)\cdot|\det g'(r,\varphi,z)|\,\mathrm{d}(r,\varphi,z) = \int_B r^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}(r,\varphi,z)\\ &= \int_{[0,\pi]\times[0,1]}\left(\int_0^{\sqrt{z}} r^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}(\varphi,z) = \int_{[0,\pi]\times[0,1]}\left[\frac{1}{3}r^3\sin(\varphi)\right]_{r=0}^{r=\sqrt{z}}\mathrm{d}(\varphi,z)\\ &= \frac{1}{3}\int_{[0,\pi]\times[0,1]} z^{\frac{3}{2}}\sin(\varphi)\,\mathrm{d}(\varphi,z) \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{3}\int_0^1\left(\int_0^\pi z^{\frac{3}{2}}\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\right)\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 z^{\frac{3}{2}}\left[-\cos(\varphi)\right]_0^\pi\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

b) Wir betrachten das Vektorfeld

$$v\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, v(x,y):=(-y,x).$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dann

$$|\overline{E}| = \frac{1}{2}\int_\gamma v(x,y)\cdot\,\mathrm{d}(x,y)$$

gilt. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_\gamma v(x,y)\cdot\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_0^{2\pi} v(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix}-b\sin(t)\\ a\cos(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a\sin(t)\\ b\cos(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi} ab\left[\cos^2(t)+\sin^2(t)\right]\,\mathrm{d}t\\ &= ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = 2\pi ab.\end{aligned}$$

Es folgt

$$|\overline{E}| = \frac{1}{2}\int_\gamma v(x,y)\cdot\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{2}2\pi ab = \pi ab.$$

Aufgabe 4 ((4+6)+10=20 Punkte)

a) Es sei $\gamma(t) := 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie

$$\text{(i)} \int_\gamma \frac{\sin(z)}{z-i}\,\mathrm{d}z, \qquad \text{(ii)} \int_\gamma z^n e^{1/z}\,\mathrm{d}z \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis zu (ii): Bestimmen Sie zunächst die Laurentreihe von $e^{1/z}$ um $z_0 = 0$ und wenden Sie den Residuensatz an.

b) Seien $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z) - g(z)| = 0.$$

Zeigen Sie, dass dann $f = g$ sein muss.

Hinweis: Satz von Liouville.

Lösungsvorschlag:

a) Da $z \mapsto \sin(z)$, $z \in \mathbb{C}$, holomorph ist, folgt aus der Cauchyschen Integralformel

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sin(i).$$

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^n e^{1/z}$. Dann ist f (auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$) holomorph. Da $e^z = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, folgt

$$f(z) = z^n e^{1/z} = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^{n-k}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{(n-k)!} + \sum_{k=1}^\infty \frac{z^{-k}}{(n+k)!} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}. \tag{6}$$

Aus der Eindeutigkeit der Laurentreihenentwicklung folgt, dass die Reihe in (6) die Laurentreihe von $f(z)$ um $z_0 = 0$ sein muss. Aus (6) lesen wir $\operatorname{res}(f;0) = \frac{1}{(n+1)!}$ ab und erhalten aus dem Residuensatz

$$\int_\gamma z^n e^{1/z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{res}(f;0) = \frac{2\pi i}{(n+1)!}.$$

Alternative Argumentation: Sei $\gamma_1(t) := e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, dass

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

gilt. Da $1/z = \overline{z}$ für alle $z \in \operatorname{Spur}(\gamma_1)$ gilt, erhalten wir daher

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\gamma_1^-} (\overline{z})^{-n} e^{\overline{z}}\,\mathrm{d}z \overset{(*)}{=} \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^{n+2}}\,\mathrm{d}z \overset{(**)}{=} \frac{2\pi i}{(n+1)!} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}z^{n+1}} e^z \bigg|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(n+1)!},$$

wobei $(*)$ mit der Definition des komplexen Wegintegrals verifiziert werden kann und wir in $(**)$ die Cauchysche Integralformel für Ableitungen auf die holomorphe Funktion $z \mapsto e^z$ angewendet haben.

c) Seien $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, sodass

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z) - g(z)| = 0. \tag{7}$$

Dann ist die Funktion

$$h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ h(z) = f(z) - g(z)$$

auch holomorph. Darüber hinaus ist h beschränkt: In der Tat, aus (7) erhalten wir die Existenz eines $R > 0$, sodass

$$|h(z)| \leq 1 \qquad \text{für } |z| > R.$$

Andererseits ist die stetige Funktion $z \mapsto |h(z)|$ auf der kompakten Menge $\overline{U_R(0)}$ beschränkt, d.h., es existiert ein $C > 0$, sodass

$$|h(z)| \leq C \qquad \text{für } |z| \leq R.$$

Zusammen erhalten wir also mit $M := \max\{1, C\}$, dass

$$|h(z)| \leq M \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

und damit die behauptete Beschränktheit von h. Nach dem Satz von Liouville muss daher $h = c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ sein. Aus (7) folgt dann

$$|c| \overset{h \text{ const.}}{=} \lim_{|z|\to\infty} |h(z)| \overset{(7)}{=} 0,$$

also $c = 0$. Also ist $h = 0$ und damit $f = g$.