Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschlag zur Modulprüfung

Aufgabe 1 (($7 + 4) + 9 = 20$ Punkte).

(a) Es seien $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

(i) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$, definiert für alle $v \in V$ durch $\|v\| := \|v\|_a + \|v\|_b$, eine Norm ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$, definiert für alle $v \in V$ durch $|||v||| := \|v\|_a - \|v\|_b$, im Allgemeinen *keine* Norm ist

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist die Matrix

$$A_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha + 1 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha & \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Zunächst bemerken wir, dass $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ aufgrund der Nichtnegativität von $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$. Nun zeigen wir die drei Eigenschaften von Normen (N1), (N2) und (N3).

(N1) Wir berechnen für alle $v \in V$

$$\|v\| = 0 \iff \|v\|_a + \|v\|_b = 0 \iff \|v\|_a = 0 \text{ und } \|v\|_b = 0 \iff v = 0,$$

wobei wir in der zweiten Äquivalenz die Nichtnegativität und in der dritten Äquivalenz (N1) von $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ ausgenutzt haben

(N2) Wir berechnen für alle $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\|\alpha v\| = \|\alpha v\|_a + \|\alpha v\|_b = |\alpha|\|v\|_a + |\alpha|\|v\|_b = |a|\big(\|v\|_a + \|v\|_b\big) = |a|\|v\|,$$

wobei wir in der zweiten Gleichheit (N2) von $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ ausgenutzt haben.

(N3) Wir berechnen für alle $u, v \in V$

$$\begin{aligned} \|u + v\| &= \|u + v\|_a + \|u + v\|_b \\ &\le \|u\|_a + \|v\|_a + \|u\|_b + \|v\|_b \\ &= \big(\|u\|_a + \|u\|_b\big) + \big(\|v\|_a + \|v\|_b\big) \\ &= \|u\| + \|v\|, \end{aligned}$$

wobei wir in der Ungleichung (N3) von $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ ausgenutzt haben.

Somit ist $\|\cdot\|$ tatsächlich eine Norm.

(ii) Es seien $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ die übliche Norm auf $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $|||v||| = \|v\|_a - \|v\|_b = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, also insbesondere auch für $v \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch zu (N1), also kann $|||\cdot|||$ keine Norm sein.

(b) Wir berechnen für alle $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
\det A_\alpha &= \det\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha-1 \\ \alpha & \alpha-1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= -(\alpha-1)\det\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha+1 \\ \alpha & \alpha-1 \end{pmatrix} \\
&= -(\alpha-1)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \alpha & \alpha-1 \end{pmatrix} \\
&= (\alpha-1)((\alpha-1)+2\alpha) \\
&= (\alpha-1)(3\alpha-1),
\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Gleichheit nach der dritten Spalte entwickelt haben und in der dritten Gleichheit die zweite Zeile von der ersten abgezogen haben. Die Matrix A_α ist genau dann invertierbar, wenn $\det A_\alpha \neq 0$, also genau dann, wenn $\alpha \neq 1$ und $\alpha \neq 1/3$. $\square$

Aufgabe 2 (3 + (8 + 3) + 6 = 20 Punkte)**.**

(a) Sei $y \in \mathbb{R}$. Die Translation $\tau_y\colon C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to C_{\mathrm{per}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sei für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert durch $\tau_y(f)(x) = f(x-y)$. Zeigen Sie, dass $\widehat{\tau_y f}(k) = \mathrm{e}^{-iky}\hat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Es sei

$$f\colon [-\pi,\pi],\ x \mapsto \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0), \\ 1 + \dfrac{x}{\pi} & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

(i) Berechnen Sie die (komplexe) Fourierreihe von f.

(ii) Für welche $x \in [-\pi,\pi]$ konvergiert die Fourierreihe von f gegen f?

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Hinweis: Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

Lösungsvorschlag.

(a) Wir berechnen mit der Substitution $\xi := x - y$ und unter Ausnutzung der Periodizität von f

$$\widehat{\tau_y f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-y}^{\pi-y} f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\xi+y)}\mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky}\hat{f}(k).$$

(b) (i) Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\Big(1+\frac{t}{\pi}\Big)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi^2}\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_{t=0}^{\pi} \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ferner berechnen wir für alle $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{k}\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\big]_{t=0}^{\pi} = \frac{\mathrm{i}}{k}\big((-1)^k - 1\big).$$

Also gilt für alle $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\bigg(\int_{-\pi}^{0} -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t + \int_0^{\pi}\frac{t}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t\bigg) \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\bigg(\big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\big]_{t=-\pi}^{0} - \big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\big]_{t=0}^{\pi} - \Big[\frac{t}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\Big]_{t=0}^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t\bigg) \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}k}\Big(\big(1-(-1)^k\big) + \big(1-(-1)^k\big) - (-1)^k - \frac{1}{\pi\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\Big) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2k\pi}\big(3(-1)^k - 2\big) + \frac{1}{2k^2\pi^2}\big((-1)^k - 1\big).\end{aligned}$$

Damit sind alle Fourierkoeffizienten berechnet und die (komplexe) Fourierreihe hat die Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

(ii) Da f stückweise glatt und außer in $-\pi$, 0 und π auch stetig ist, konvergiert die Fourierreihe nach dem Darstellungssatz in allen außer diesen drei Punkten gegen

f. Ebenfalls aus dem Darstellungssatz folgt, dass die Fourierreihe in diesen drei Punkten nicht gegen f konvergiert, sondern gegen $3/2$ bei $-\pi$ und π sowie gegen 0 bei 0.

(c) Der Integrand ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig und ferner ist

$$B := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [0,1], \ x \in [y,1]\big\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,1], \ y \in [0,x]\big\}$$

ein Normalenbereich. Die obige Gleichheit gilt, da

$$y \in [0,1], x \in [y,1] \iff 0 \le y \le x \le 1 \iff x \in [0,1], \ y \in [0,x].$$

Daher erhalten wir nach Seite 120 und 121 des Skriptes

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^1 \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \mathrm{d}x \mathrm{d}y &= \int_B \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^x \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) [1]_{y=0}^x \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 x \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big) \mathrm{d}x \\
&= \Big[-\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\Big)\Big]_{x=0}^1 \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-1/2}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 ((3 + 5 + 5) + (5 + 2) = 20 Punkte)**.**

(a) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x,y) \mapsto \begin{cases} \sqrt[4]{|xy|}\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit.

(ii) Untersuchen Sie, für welche $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existiert und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(iii) Untersuchen Sie, ob f differenzierbar ist.

(b) Es seien

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

und

$$v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + 2y + 3z\mathrm{e}^{yz} \\ 3y\mathrm{e}^{yz} \end{pmatrix}.$$

(i) Besitzt v eine Stammfunktion? Geben Sie eine solche Stammfunktion an und zeigen Sie, dass sie eine ist, sofern sie existiert.

(ii) Berechnen Sie $\int_\gamma v(x,y,z) \cdot \mathrm{d}s$.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) In allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f stetig als Komposition stetiger Funktionen. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ berechnen wir

$$\left| \sqrt[4]{|xy|} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt[4]{|xy|} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = \sqrt[4]{|xy|} \to 0$$

für $(x,y) \to (0,0)$. Somit ist f in $(0,0)$ stetig.

(ii) Es sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(tv) - f(0,0)}{t} = t^{-1} \sqrt[4]{|tv_1 tv_2|} \frac{t^2 v_1^2 - t^2 v_2^2}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} = t^{-1/2} \sqrt[4]{|v_1 v_2|} \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Der Grenzwert für $t \to 0$ existiert genau dann, wenn $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ oder $v_1 = \pm v_2$. In diesen Fällen ist die Richtungsableitung 0, ansonsten existiert sie nicht.

(iii) In allen $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f differenzierbar als Komposition differenzierbarer Funktionen.

Lösungsweg 1: Da nach Teilaufgabe (ii) nicht alle Richtungsableitungen existieren, ist die Funktion in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

Lösungsweg 2: Falls f in $(0,0)$ differenzierbar wäre, so müsste nach der Rechnung in Teilaufgabe (ii) die Ableitung durch $J_f(0,0) = (\partial_x f(0,0), \partial_y f(0,0)) = (0,0)$ gegeben sein.

Mit der Definition der Ableitung müsste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(x,y) - J_f(0,0) \cdot (x,y)|}{\|(x,y)\|} = 0$$

gelten. Für $(x_n, y_n) \coloneqq (2/n, 1/n)$ gilt jedoch

$$\begin{aligned}
&\frac{|f(x_n, y_n) - f(0,0) - J_f(0,0) \cdot (x_n, y_n)|}{\|(x_n, y_n)\|} \\
&= \sqrt{n^{-2} + 4n^{-2}}^{-1} \sqrt[4]{2n^{-2}} \frac{4n^{-2} - n^{-2}}{4n^{-2} + n^{-2}} \\
&= \frac{3\sqrt[4]{2}n^2 n}{5\sqrt{5}\sqrt{n}n^2} \\
&= \frac{3\sqrt{5}\sqrt[4]{2}}{25}\sqrt{n} \\
&\to \infty
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Daher ist f in $(0,0)$ nicht differenzierbar.

(b) (i) Es bezeichne $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine zu konstruierende Funktion, die hoffentlich eine Stammfunktion von v ist. Auf der Suche nach F betrachten wir zunächst die erste Komponente von v. Wir wissen, dass $F_x(x,y,z) = y^2$, also $F(x,y,z) = xy^2 + c(y,z)$ für eine Funktion $c\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Aus der dritten Komponente von v zusammen mit der vorherigen Überlegung folgt, dass $F(x,y,z) = xy^2 + 3\mathrm{e}^{yz} + d(x,y)$ für eine Funktion $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Leiten wir unser bisher konstruiertes F nach y ab, erhalten wir $F_y(x,y,z) = 2xy + 3z\mathrm{e}^{yz} + d_y(x,y)$. Vergleichen wir das mit der zweiten Komponente von v, scheint $d(x,y) = y^2$ eine plausible Wahl, sodass wir bei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto xy^2 + y^2 + 3\mathrm{e}^{yz}$ auskommen.

In der Tat ist dieses F eine Stammfunktion von v: Wir erhalten durch Gradientenbildung

$$\operatorname{grad} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + 2y + 3z\mathrm{e}^{yz} \\ 3y\mathrm{e}^{yz} \end{pmatrix}.$$

(ii) Da v eine Stammfunktion besitzt, hängt das Wegintegral nur vom Anfangs- sowie Endpunkt des Weges γ ab. Daher berechnen wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma v \cdot \mathrm{d}s &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) \\
&= f\left(\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) - f\left(\gamma\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \\
&= 1 \cdot 0^2 + 0^2 + 3\mathrm{e}^{0\cdot 2} - 0(-1)^2 - (-1)^2 - 3\mathrm{e}^{-1\cdot 0} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4 (5 + 4 + (3 + 4) + 4 = 20 Punkte)**.**

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir wie üblich $z = x + \mathrm{i}y$ für eindeutig bestimmte $x, y \in \mathbb{R}$. Es sei $f\colon (-1,1)^2 \to \mathbb{C}, (x+\mathrm{i}y) \mapsto x \arcsin y + \mathrm{i}y \arcsin x$. Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ die Funktion f komplex differenzierbar ist.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Singularität der Abbildung $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)/z$ in 0 hebbar ist.

(c) (i) Es sei

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{\cosh(z-1) - 1}{z-1} \mathrm{d}z.$$

Hinweis: Sie können verwenden, dass die Abbildung $\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto 1/2(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z})$ *holomorph ist.*

(ii) Es sei

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto \begin{cases} 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} & t \in [0, \pi), \\ \frac{4}{\pi}t - 6 & t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{(z^2+1)^2} \mathrm{d}z.$$

(d) Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\operatorname{Re} f \leq C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.
Hinweis: Betrachten Sie $g \coloneqq \exp \circ f$.

Lösungsvorschlag.

(a) Wir setzen $u\colon (-1,1)^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \arcsin y$ und $v\colon (-1,1)^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y \arcsin x$. Dann gilt $f(x + \mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ für alle $x, y \in (-1,1)$. Zudem sind u und v als Produkt reell differenzierbarer Funktionen auf ganz $(-1,1)^2$ reell differenzierbar.

Wir überprüfen nun, für welche $(x,y) \in (-1,1)^2$ die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen gelten. Hierzu bemerken wir, dass für alle $(x,y) \in (-1,1)^2$

$$u_x(x,y) = \arcsin y$$
$$u_y(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$v_x(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$v_y(x,y) = \arcsin x.$$

Damit gilt aufgrund der Bijektivität des Arcussinus

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \iff \arcsin y = \arcsin x \iff y = x.$$

In diesem Falle gilt

$$u_y(x,y) = -v_x(x,y) \iff \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \iff x = 0.$$

Also ist f nur in 0 komplex differenzierbar.

(b) **Lösungsweg 1:** Da f auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, existiert eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und feste $a_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Da $f(0) = 0$, folgt $a_0 = 0$. Somit gilt

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} z^k.$$

Also ist $f(z)/z$ wieder holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und die Singularität in 0 ist hebbar.

Lösungsweg 2: Es gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \to f'(0)$$

für $z \to 0$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist die Singularität in 0 also hebbar.

Bemerkung: Die Darstellung der Residuen von Aufgabe 3 von Übungsblatt 14 wurde nur für Pole gezeigt. Da hier kein Pol auftritt, kann diese Darstellung nicht ohne weiteres genutzt werden.

(c) (i) **Lösungsweg 1:** Wir setzen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \cosh z - 1$. Dann ist f nach dem Hinweis holomorph auf $\mathbb{C}$. Ferner ist $\mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und γ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Also ist nach Teilaufgabe (b) die Singularität der Abbildung $z \mapsto f(z)/z$ hebbar. Somit ist auch die einzige Singularität des Integranden des ersten Wegintegrals hebbar und das Wegintegral nach dem Cauchyschen Integralsatz gleich 0.

Lösungsweg 2: Wir setzen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \cosh(z-1) - 1$. Dann ist f nach dem Hinweis holomorph auf $\mathbb{C}$. Zudem ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer, einfach geschlossener und positiv orientierter Weg in der einfach zusammenhängenden offenen Menge $\mathbb{C}$. Mit der Cauchyschen Integralformel folgt also

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-1} \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} f(1) = 0.$$

Bemerkung: Die Darstellung der Residuen von Aufgabe 3 von Übungsblatt 14 wurde nur für Pole gezeigt. Da hier kein Pol auftritt, kann diese Darstellung nicht ohne weiteres genutzt werden.

(ii) Für das Wegintegral schreiben wir zunächst

$$f(z) := \frac{\sin z}{(z^2+1)^2} = \frac{\sin z}{(z+\mathrm{i})^2 (z-\mathrm{i})^2}.$$

Da der Weg die obere Hälfte des Kreises mit Radius 2 und Mittelpunkt 0 in der komplexen Ebene umläuft, erkennen wir, dass wir für den Wert des Wegintegrals lediglich die Singularität bei $z = \mathrm{i}$ betrachten müssen. Zudem ist γ ein stückweise stetig differenzierbarer, einfach geschlossener und positiv orientierter Weg in der einfach zusammenhängenden offenen Menge $\mathbb{C}$. Da die Singularität bei $z = \mathrm{i}$ ein Pol zweiter Ordnung ist, setzen wir $g(z) := (z-\mathrm{i})^2 f(z)$ und berechnen

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{\sin z}{(z+\mathrm{i})^2} \\ &= \frac{\cos z (z+\mathrm{i})^2 - \sin z \cdot 2(z+\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})^4} \\ &= \frac{\cos z}{(z+\mathrm{i})^2} - \frac{2 \sin z}{(z+\mathrm{i})^3}, \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} g'(\mathrm{i}) &= \frac{\cos \mathrm{i}}{(2\mathrm{i})^2} - \frac{2 \sin \mathrm{i}}{(2\mathrm{i})^3} \\ &= -\frac{\cos \mathrm{i}}{4} - \frac{\mathrm{i} \sin \mathrm{i}}{4} \\ &= -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}^2} + \mathrm{e}^{(-\mathrm{i})^2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}^2} - \mathrm{e}^{(-\mathrm{i})^2}\right) \\ &= -\frac{1}{4\mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Somit ist der Wert des Wegintegrals nach der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen (oder mit dem Residuensatz mit der Darstellung der Residuen aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 14) $-\pi \mathrm{i}/(2\mathrm{e})$.

(d) Wir schreiben $f(z) = u(z) + \mathrm{i}v(z)$ für zwei reellwertige Funktionen u und v. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|g(z)| = |\exp(f(z))| = |\exp(u(z))||\exp(\mathrm{i}v(z))| = |\exp(u(z))| \leq \mathrm{e}^C.$$

Da g als Komposition auf $\mathbb{C}$ holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, folgt mit dem Satz von Liouville, dass g konstant ist. Also gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$0 = g'(z) = f'(z)\exp(f(z)),$$

also $f'(z) = 0$, da $\exp(f(z)) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Somit ist auch f konstant. (Man beachte, dass der komplexe Logarithmus immer nur auf der geschlitzten Ebene stetig ist und entsprechend aus der Konstanz von $\log g$ nicht direkt die Konstanz von f folgt, weshalb wir hier das Argument mit der Ableitung wählen.) $\square$