Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M.Sc. Niklas Knobel
M.Sc. Sebastian Ohrem

Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Sommersemester 2024

12. September 2024

Aufgabe 1 ($2+7+7+4=20$ Punkte):
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 & 1 \\ \mathrm{i} & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: A ist hermitesch.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(c) Bestimmen Sie eine unitäre Matrix S und eine Diagonalmatrix D so, dass $A = SDS^{-1}$ gilt.

(d) Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\operatorname{spur}(A^{11})$.

Aufgabe 2 ($7+13=20$ Punkte):

(a) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy+z} + \cos(x+z).$$

Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(\pi,0) \in U$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in V$ und ein $g \in C^1(U,V)$ gibt mit $g(\pi,0)=0$, sodass $f(x,y,g(x,y))=0$ gilt für alle $(x,y) \in U$. Bestimmen Sie $g'(\pi,0)$.

(b) Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = x + xy + z^2$$

eingeschränkt auf die Menge

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 = 1\right\}.$$

Aufgabe 3 ($6+6+8=20$ Punkte):

(a) Sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix},$$

und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xe^z + yz$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f ds$.

(b) Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le y \le \sqrt{\pi}\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \sin(y^2)\,\mathrm{d}(x,y).$$

(c) Sei $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = \sin^2(z),\ \frac{\pi}{4} \le z \le \frac{\pi}{2}\}$ und $f : K \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_K f\,\mathrm{d}o.$$

Aufgabe 4 ($(8+2)+(5+5)=20$ Punkte):

(a) Die 2π-periodische Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = \pi - |t|$ für $t \in [-\pi, \pi)$.

(i) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten von g und geben Sie die Fourierreihe von g an.

(ii) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe gegen $g(t)$?

(b) (i) Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{1}{\sin(z)}\,\mathrm{d}z$ für $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

(ii) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} f \le c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

HINWEIS: Betrachten sie die Funktion $z \mapsto e^{f(z)}$.

Viel Erfolg!