

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik
Sommersemester 2024

12. September 2024

Aufgabe 1 (2 + 7 + 7 + 4 = 20 Punkte):

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 1 & 1 \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie: A ist hermitesch.
- Bestimmen Sie die Eigenwerte von A .
- Bestimmen Sie eine unitäre Matrix S und eine Diagonalmatrix D so, dass $A = SDS^{-1}$ gilt.
- Bestimmen Sie $\det(A)$ und $\text{spur}(A^{11})$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

- Man erkennt an der Matrix direkt, dass $A^\top = \overline{A}$ gilt. Entsprechend ist $A^* = \overline{(A^\top)} = \overline{(\overline{A})} = A$, also ist A hermitesch.
- Zunächst berechnen wir das charakteristische Polynom

[illegible]

Somit hat A die Eigenwerte $-2, 1, 2$.

Bemerkung: Da alle Nullstellen einfach sind, haben alle Eigenwerte algebraische und geometrische Vielfachheit 1.

- (c) Nun berechnen wir die Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_A(1) &= \text{Kern}(A - I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 0 & 1 \\ i & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad}^+ \\ \boxed{\quad} \\ \xleftarrow{\quad}_+ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \xleftarrow{\quad}_{-i} \end{array} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \boxed{\cdot i \xleftarrow{\quad}} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \\ &= \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

$$E_A(2) = \text{Kern}(A - 2I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & -1 & 1 \\ \mathbf{i} & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overleftarrow{\quad}^+ \\ \overleftarrow{\quad}_i \\ \overleftarrow{\quad} \end{array} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ \mathbf{i} & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \overleftarrow{\quad} \\ \left| \begin{array}{c} \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot (-\mathbf{i}) \end{array} \right. \overleftarrow{\quad} \end{array}$$

$$= \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3i \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_A(-2) = \text{Kern}(A + 2I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 3 & 1 \\ \mathbf{i} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow^+ \\ \leftarrow^+ \\ \leftarrow^+ \end{array} \Bigg]_{3\mathbf{i}}^+ = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 4\mathbf{i} & 2\mathbf{i} \\ 0 & 4 & 2 \\ \mathbf{i} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow^+ \\ \leftarrow_{-\mathbf{i}} \\ \leftarrow^+ \end{array} \Bigg]_{+}^{-\frac{1}{4}} \\ = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ \mathbf{i} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \cdot \frac{1}{4} \\ \leftarrow \cdot (-\mathbf{i}) \end{array} \Bigg] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\mathbf{i}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{i}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Um aus den aufspannenden Vektoren eine unitäre Matrix zu machen, müssen wir diese noch normieren. Wir wählen also

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_{-2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nach Vorlesung (Satz 18.7) sind diese Eigenvektoren orthogonal zueinander. Insgesamt haben wir die Darstellung $A = SDS^{-1}$ mit

$$S = (v_1, v_2, v_{-2}) = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

gezeigt.

- (d) Ähnliche Matrizen haben nach Vorlesung (Bemerkung 18.4 (b) und Satz 18.5 (b)) dieselbe Spur und Determinante. Damit gelten

$$\det(A) = \det(D) = 1 \cdot 2 \cdot (-2) = -4 \quad \text{und} \quad \text{spur}(A^{11}) = \text{spur}(D^{11}) = 1^{11} + 2^{11} + (-2)^{11} = 1,$$

Bemerkung: Hier haben wir verwendet, dass A^{11} und D^{11} ähnlich sind. Dies gilt wegen $A^{11} = SD^{11}S^{-1}$.

Aufgabe 2 (7 + 13 = 20 Punkte):

- (a) Es sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = e^{xy+z} + \cos(x+z).$$

Zeigen Sie, dass es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(\pi, 0) \in U$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in V$ und ein $g \in C^1(U, V)$ gibt mit $g(\pi, 0) = 0$, sodass $f(x, y, g(x, y)) = 0$ gilt für alle $(x, y) \in U$. Bestimmen Sie $g'(\pi, 0)$.

- (b) Berechnen Sie das Maximum der Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = x + xy + z^2$$

eingeschränkt auf die Menge

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

- (a) Wir verwenden den Satz über implizit definierte Funktionen. Dazu merken wir zunächst an, dass f beliebig oft differenzierbar ist als Komposition beliebig oft differenzierbarer Funktionen. Die partiellen Ableitungen berechnen wir:

$$\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,z) = (ye^{xy+z} - \sin(x+z), \quad xe^{xy+z}), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (e^{xy+z} - \sin(x+z))$$

Im Punkt $(\pi, 0, 0)$ ist $\frac{\partial f}{\partial z}(\pi, 0, 0) = 1$ invertierbar. Weiter gilt $f(\pi, 0, 0) = 0$. Damit existieren nach dem Satz über implizit definierte Funktionen offene Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $(\pi, 0) \in U$, $0 \in V$ und eine Funktion $g \in C^1(U, V)$, sodass für $(x, y) \in U$ und $z \in V$ gilt: $f(x, y, z) = 0 \iff z = g(x, y)$. Weiter gilt

$$g'(x, y) = - \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial (x, y)}(x, y, g(x, y))$$

für $(x, y) \in U$ und damit wegen $g(\pi, 0) = 0$

$$g'(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der Satz über implizit definierte Funktionen ist nur auf stetig differenzierbare Funktionen anwendbar. Bevor man den Satz anwenden möchte, muss man dies explizit sicherstellen.

- (b) Zunächst halten wir fest, dass f und $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ beliebig oft differenzierbar sind als Polynomfunktionen. Weiter ist die Sphäre S kompakt. Somit nimmt f eingeschränkt auf S sein Maximum an einer Stelle (x, y, z) an. Nach dem Satz von Lagrange existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1+y & x & 2z \end{pmatrix} = f'(x, y, z) = \lambda h'(x, y, z) = 2\lambda \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix},$$

was sich in Komponenten als

$$1+y = 2\lambda x \quad x = 2\lambda y \quad z(\lambda - 1) = 0$$

schreibt.

Fall 1: Ist $\lambda = 1$, so folgt aus $x = 2y$, $1+y = 2x = 4y$, dass $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ gelten. Wegen $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ folgt daraus $z = \pm \frac{2}{3}$. Wir berechnen den Funktionswert an diesen Punkten und erhalten so

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{4}{3}.$$

Fall 2: Ist $z = 0$, so folgt aus $x = 2\lambda y$, $1+y = 2\lambda x = 4\lambda^2 y$, dass $y = \frac{1}{4\lambda^2 - 1}$, $x = \frac{2\lambda}{4\lambda^2 - 1}$ gelten und insbesondere für den Nenner $4\lambda^2 - 1 \neq 0$. Weiter ist

$$x^2 + y^2 = 1 \implies 1 + 4\lambda^2 = (4\lambda^2 - 1)^2 = 16\lambda^4 - 8\lambda^2 + 1 \implies \lambda^4 - \frac{3}{4}\lambda^2 = 0,$$

was die Lösungen $\lambda = 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ besitzt.

Fall 2.1: Für $\lambda = 0$ haben wir $x = 0, y = -1$ und damit $f(0, -1, 0) = 0$.

Fall 2.2: Für $\lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ haben wir $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ und damit $f(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0) = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Ergebnis: Da alle in den Fällen gefundenen Punkte auf S liegen, ist das Maximum von f auf S gleich dem Maximum der Funktionswerte der gefundenen Punkte, also gleich

$$\max \left\{ \frac{4}{3}, 0, \frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4} \right\}.$$

Wir müssen das Maximum noch ausrechnen. Dabei gilt

$$\frac{4}{3} > \frac{3\sqrt{3}}{4} \iff 16 > 9\sqrt{3} \iff 256 = 16^2 > 9^2 \cdot 3 = 243.$$

Also ist das Maximum von f auf S gleich $\frac{4}{3}$.

Aufgabe 3 (6 + 6 + 8 = 20 Punkte):

(a) Sei $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix},$$

und $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^z + yz$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f ds$.

(b) Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq \sqrt{\pi}\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_A \sin(y^2) d(x, y).$$

(c) Sei $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = \sin^2(z), \frac{\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}$ und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_K f d\sigma.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Wir berechnen

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

und somit ist $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$. Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos(t) e^t + \sin(t) t dt \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{1}{2} (\sin(t) + \cos(t)) e^t - t \cos(t) + \sin(t) \right]_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{e^{2\pi} - 1}{2} - 2\pi \right). \end{aligned}$$

(b) Mit dem Satz von Fubini folgt, dass

$$\begin{aligned} \int_A \sin(y^2) x^2 d(x, y) &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^y \sin(y^2) dx dy \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2) y dy. \end{aligned}$$

Wir substituieren $z = y^2$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_A \sin(y^2) d(x, y) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(z) dz \\ &= \frac{1}{2} [-\cos(z)]_0^{\pi} \\ &= 1. \end{aligned}$$

(c) Eine reguläre Parametrisierung von K ist gegeben durch $\phi : [0, 2\pi] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ definiert durch

$$\phi(\theta, z) = \begin{pmatrix} \sin(z) \sin(\theta) \\ \sin(z) \cos(\theta) \\ z \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist ϕ surjektiv und injektiv im Inneren von $[0, 2\pi] \times [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Wir berechnen

$$(\partial_\theta \phi, \partial_z \phi) = \begin{pmatrix} \sin(z) \cos(\theta) & \cos(z) \sin(\theta) \\ -\sin(z) \sin(\theta) & \cos(z) \cos(\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\partial_\theta \phi \times \partial_z \phi = \begin{pmatrix} -\sin(z) \sin(\theta) \\ -\sin(z) \cos(\theta) \\ \sin(z) \cos(z) \end{pmatrix},$$

und daraus folgt $\|\partial_\theta \phi \times \partial_z \phi\| = \sqrt{\sin^2(z)(1 + \cos^2(z))}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_K f \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(z)} \sqrt{\sin^2(z)(1 + \cos^2(z))} \, dz d\theta \\ &= 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(z) \sin(z) \sqrt{1 + \cos^2(z)} \, dz \\ &= -\frac{2}{3}\pi [(1 + \cos^2(z))^{\frac{3}{2}}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\pi ((1 + \frac{1}{2})^{\frac{3}{2}} - 1) \\ &= \pi(\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 ((8 + 2) + (5 + 5) = 20 Punkte):

- (a) Die 2π -periodische Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $g(t) = \pi - |t|$ für $t \in [-\pi, \pi)$.
- (i) Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten von g und geben Sie die Fourierreihe von g an.
- (ii) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourierreihe gegen $g(t)$?
- (b) (i) Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{1}{\sin(z)} \, dz$ für $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = 4e^{it}$.
- (ii) Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} f \leq c$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.
- HINWEIS: Betrachten sie die Funktion $z \mapsto e^{f(z)}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

- (a) (i) Da f gerade ist folgt, dass $b_k(f) = 0$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir berechnen

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |t|) \, dt = \frac{\pi}{2}$$

und für $k \in \mathbb{N}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) (\pi - |t|) \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt) t \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{k} \sin(kt) t + \frac{1}{k^2} \cos(kt) \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi k^2} & k = 2n - 1, \, n \in \mathbb{N} \\ 0 & k = 2n, \, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit ist die Fourierreihe von g gegeben durch

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)t)$$

- (ii) Da g stetig und stückweise differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe nach dem Darstellungssatz für alle t gegen $g(t)$.
- (b) (i) Wir schreiben $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$. Die Funktion f ist holomorph auf $\mathbb{R} \setminus \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$ und damit folgt mit dem Residuensatz

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sin(z)} dz = 2\pi i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \operatorname{res}(f, \pi n) \operatorname{ind}_{\gamma}(\pi n).$$

Die Kurve γ umläuft alle $z \in \{\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$ mit $\|z\| < 4$ einmal, damit gilt

$$\operatorname{ind}_{\gamma}(\pi n) = \begin{cases} 1, & |n| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f hat in $n\pi$ ein Pol erster Ordnung wegen

$$\lim_{z \rightarrow \pi n} \frac{z - \pi n}{\sin(z)} = \frac{1}{\sin'(\pi n)} = \frac{1}{\cos(\pi n)} = (-1)^n,$$

woraus direkt $\operatorname{res}(f, n\pi) = (-1)^n$ folgt. Damit berechnen wir

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sin(z)} dz = 2\pi i \sum_{|n| \leq 1} (-1)^n = -2\pi i.$$

- (ii) Wir definieren $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(z) := e^{f(z)}$. Als Verknüpfung von holomorphen Funktionen ist g holomorph. Für c gilt

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^c$$

Damit folgt mit dem Satz von Liouville, dass g konstant ist. Es gilt $1 = e^{f(z)} e^{-f(z)} = g(z) e^{-f(z)}$ und damit folgt $g(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C}$. Wir berechnen $0 = g'(z) = f'(z) e^{f(z)}$ und folgern $f'(z) = 0$. Also ist f constant.