

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Hauptklausur

Aufgabe 1: ((5+5) + (6+4) = 20 Punkte)

(a) Gegeben seien die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Entscheiden Sie, ob diese Vektoren linear unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.
- ii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis aus Vektoren im $\mathbb{R}^3$, die denselben Raum wie die drei angegebenen Vektoren aufspannt.

(b) Es sei $D \in \mathbb{R}^{2025 \times 2025}$ die Matrix, welche in jedem Eintrag die Zahl 2 enthält.

- i) Ist D diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie den Kern von D . Geben Sie alle Eigenwerte der Matrix D sowie deren Vielfachheiten an.
- ii) Sei nun $I \in \mathbb{R}^{2025 \times 2025}$ die Einheitsmatrix. Wir definieren die Matrix $B = D - I$. Bestimmen Sie die **Spur** und die **Determinante** der Matrix B .

LÖSUNGSHINWEISE:

a) i) Wir bestimmen die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

D.h. mindestens einer der Vektoren kann durch die anderen beiden dargestellt werden. Die Vektoren sind also nicht linear unabhängig.

- ii) Die drei angegebenen Vektoren spannen eine Ebene auf. Diese Ebene wird bereits von den zwei linear unabhängigen Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren an. D.h.

$$v_1 = w_1 \quad \text{und} \quad v_2 = w_2 - \langle v_1, w_2 \rangle \|v_1\|^{-2} v_1.$$

Es bilden also $\hat{v}_1, \hat{v}_2$ eine Orthonormalbasis dieser Ebene:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ sehen wir, dass schon v_1 und v_2 orthogonal sind. Wenn wir v_1 und v_2 auf Länge 1 normieren, erhalten wir ebenfalls $\hat{v}_1$ und $\hat{v}_2$.

- b) i) Die Matrix D ist nach Konstruktion symmetrisch also auch diagonalisierbar, und zwar durch eine orthogonale Matrix. Der Rang von D ist offenbar 1, und der Kern von D ist

$$\{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2025}) \in \mathbb{R}^{2025} : \sum_{j=1}^{2025} x_j = 0\},$$

die Menge aller Vektoren, die auf $(1, 1, \dots, 1)$ senkrecht stehen, und hat die Dimension $2025 - 1 = 2024$. Somit ist 0 ein Eigenwert der geometrischen Vielfachheit 2024. Da D diagonalisierbar ist, ist 2024 auch die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 0. Die Spur von D ist $2025 \cdot 2 = 4050$ und ist die Summe der Eigenwerte (mit algebraischer Vielfachheit wiederholt). Also ist 4050 ein Eigenwert von D der (algebraischen und geometrischen) Vielfachheit 1. Ein Eigenvektor ist $(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{2025}$.

- ii) Die Spur von B ist die Summe der Eigenwerte von B und die Determinante von B ist das Produkt der Eigenwerte von B , jeweils mit algebraischer (oder hier auch geometrischer) Vielfachheit wiederholt (beachte, dass auch B symmetrisch, also orthogonal diagonalisierbar ist). Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(D - (\lambda + 1)I) = p_D(\lambda + 1).$$

Somit ist λ Eigenwert von B genau dann, wenn $\lambda + 1$ Eigenwert von D ist, und zwar mit derselben algebraischen Vielfachheit. Folglich hat B die Eigenwerte -1 (Vielfachheit 2024) und 4049 (Vielfachheit 1). Wir erhalten $4049 - 2024 = 2025$ für die Spur von B und $4049 \cdot (-1)^{2024} = 4049$ für die Determinante von B .

Aufgabe 2: (10 + 10 = 20 Punkte)

- a) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $f(0, 0) = 0$. Geben Sie hinreichende Bedingungen an die partiellen Ableitung $\partial_x f(0, 0)$ und $\partial_y f(0, 0)$ an so, dass die Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x, y) = f(x, f(x, y))$$

lokal nach x aufgelöst werden kann. Das heißt, dass Umgebungen $U, V \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in U, 0 \in V$ sowie eine Abbildung $\varphi \in C^1(U, V)$ existieren so, dass für jedes $(x, y) \in V \times U$

$$h(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi(y).$$

- b) Angenommen U, V sowie φ aus Aufgabenteil a) existieren. Bestimmen Sie die Ableitung $\varphi'(0)$ in Abhängigkeit von $\partial_x f(0, 0)$ und $\partial_y f(0, 0)$.

LÖSUNGSHINWEISE:

- a) Die Aussage folgt aus dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn alle Voraussetzungen erfüllt sind. Es ist klar, dass die zu untersuchende Abbildung h stetig differenzierbar ist als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen. Es gilt $f(0, f(0, 0)) = f(0, 0) = 0$ und nach Kettenregel

$$\partial_x h(0, 0) = \partial_x f(0, 0) + \partial_y f(0, 0) \partial_x f(0, 0) = \partial_x f(0, 0) (1 + \partial_y f(0, 0)).$$

Für die Anwendung des Satzes brauchen wir $\partial_x h(0, 0) \neq 0$, dh $\partial_x f(0, 0) \neq 0$ und $\partial_y f(0, 0) \neq -1$. In diesem Fall sind alle Voraussetzungen erfüllt.

- b) Auf U ist die Abbildung $y \mapsto h(\varphi(y), y)$ konstant, also verschwindet auch die totale Ableitung nach y und demnach ist für $y \in U$:

$$0 = \frac{d}{dy} (h(\varphi(y), y)) = (\partial_1 h)(\varphi(y), y) \varphi'(y) + (\partial_2 h)(\varphi(y), y) \Rightarrow \varphi'(y) = \frac{-\partial_2 h(\varphi(y), y)}{\partial_1 h(\varphi(y), y)}.$$

Für $y = 0$ erhalten wir $\varphi'(0) = -\frac{\partial_y h(0,0)}{\partial_x h(0,0)}$. Alternativ erhält man diese Formel auch direkt aus dem Satz.

Den Nenner haben wir in Aufgabenteil a) bereits bestimmt. Wir bestimmen noch

$$\partial_y h(0,0) = \partial_y f(0,0) \partial_y f(0,0) = (\partial_y f(0,0))^2.$$

Es gilt also

$$\varphi'(0) = -\frac{(\partial_y f(0,0))^2}{\partial_x f(0,0)(1 + \partial_y f(0,0))}.$$

Aufgabe 3: (10 + 10 = 20 Punkte)

a) Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ so, dass

$$z^2 = 2(x^2 + y^2), \quad \text{und} \quad z \in [2, 4].$$

Bestimmen Sie den Flächeninhalt $|\overline{E}|$ der so definierten Fläche.

b) Es sei ∂D der positiv orientierte Rand von

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3x^4\}.$$

Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial D} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}.$$

LÖSUNGSHINWEISE:

a) Es handelt sich bei E um einen Teil eines Kegelmantels. Wir wählen eine Parametrisierung. Eine direkte Parametrisierung ist

$$u(r, \varphi) = r \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad r \in [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}], \varphi \in [0, 2\pi).$$

Man prüft leicht, dass $u([\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \times [0, 2\pi)) = E$. Wir bestimmen nun einen Normalenvektor an die Fläche E . Hierfür bestimmen wir die Tangentialvektoren

$$\partial_r u(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi u(r, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Indem wir das Kreuzprodukt dieser Vektoren bilden, finden wir

$$\begin{aligned} N(r, \varphi) &= r \det \begin{pmatrix} e_1 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ e_2 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ e_3 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= r e_3 \det \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} - \sqrt{2} r \begin{pmatrix} e_1 & \cos(\varphi) \\ e_2 & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= -r e_3 + \sqrt{2} r \sin(\varphi) e_1 + \sqrt{2} r \cos(\varphi) e_2. \end{aligned}$$

Wir bestimmen damit das Oberflächenintegral

$$|\overline{E}| = \int_E d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \|N(r, \varphi)\| dr d\varphi = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{3} r dr = \sqrt{3} \cdot 6\pi.$$

- b) Wir bestimmen das Integral direkt mithilfe der drei Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $\gamma_2(t) = (1, t)$ und $\gamma_3(t) = (t, 3t^4)$ definiert sind. Es ist

$$\int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 1/3,$$

$$\int_{\gamma_2} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 + 9t^2 \\ 9t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = 27/2 = 13 + 1/2,$$

$$\int_{\gamma_3} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + 9t^8 \\ 9t^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 12t^3 \end{pmatrix} dt = 13 + 1/3.$$

Es ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$ eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes ∂D und demnach gilt

$$\int_{\partial D} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 3xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = 1/3 + 13 + 1/2 - 13 - 1/3 = 1/2.$$

Aufgabe 4: (4 + 8 + 8 = 20 Punkte)

- a) Bestimmen Sie alle Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$, in denen die Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $f(z) = |z|^3$, komplex differenzierbar ist.
- b) Bestimmen Sie die Laurentreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 3$ sowie das Residuum in $z_0 = 3$ der Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 12z + 27},$$

wobei $U \subseteq \mathbb{C}$ der maximale Definitionsbereich von f ist. Geben Sie den Konvergenzradius der Laurentreihe an.

- c) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$$

HINWEIS: Wählen Sie einen geeigneten Weg in $\mathbb{C}$, um das reelle Integral zu approximieren und verwenden Sie dann den Residuensatz.

LÖSUNGSHINWEISE:

- a) Wir überprüfen dies anhand der Cauchy-Riemann DGLn. Es ist

$$\Re(f(a+ib)) = |a+ib|^3 = (a^2+b^2)^{3/2}, \quad \Im(f(a+ib)) = 0.$$

Damit die CR DGLn erfüllt sind, muss also gelten

$$\partial_a (a^2 + b^2)^{3/2} = 0, \quad \partial_b (a^2 + b^2)^{3/2} = 0.$$

Beide Gleichungen können nur für $a = b = 0$ erfüllt werden. D.h. auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist f nicht komplex differenzierbar. In $z_0 = 0$ prüfen wir die komplexe Differenzierbarkeit direkt. Wir prüfen den Limes des Differenzenquotienten

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^3}{z}.$$

Da $\left| |z|^3 z^{-1} \right| = |z|^2$ existiert der Grenzwert auf der rechten Seite und somit ist f in $z_0 = 0$ komplex differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

- b) Um die Laurentreihe zu bestimmen, führen wir zunächst eine Partialbruchzerlegung durch. Es ist $z^2 - 12z + 27 = (z - 3)(z - 9)$. Damit ist also

$$\frac{1}{z^2 - 12z + 27} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z - 9} - \frac{1}{z - 3} \right).$$

Da wir um $z_0 = 3$ entwickeln wollen, definieren wir $w = z - 3$ und untersuchen den Ausdruck

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{x - 6} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{36} \left(\frac{1}{x/6 - 1} \right) - \frac{1}{6x}$$

Für $|x| < 6$ können wir den Ausdruck in der Klammer durch eine geometrische Reihe ersetzen, so dass

$$\frac{1}{x/6 - 1} = - \sum_{k=0}^{\infty} (x/6)^k.$$

Insgesamt findet man also

$$\frac{1}{z^2 - 12z + 27} = \frac{-1}{6(z - 3)} - \frac{1}{36} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - 3)^k}{6^k}.$$

Der Konvergenzradius ist also $R = 6$. Das ist auch der Abstand der beiden Nullstellen des Nenners.

- c) Um das Integral zu bestimmen, klassifizieren wir zunächst die Singularitäten des Integranden. Es ist $f(x)^{-1} = (1 + x^2)^2 = (x - i)^2(x + i)^2$. Demnach handelt es sich um Pole zweiter Ordnung bei $z = i$ und $z = -i$. Der Grad des Polynoms ist 4 und der Zähler des Integranden ist konstant. Nach Vorlesung verschwindet in diesem Fall ein entsprechendes Integral über einen Kreisbogen in der Komplexen Ebene im Grenzfall für unendlich große Radien. Wir wählen die Wege $\gamma_{1,R}(t) = t$ für $t \in [-R, R]$ und $\gamma_{2,R}(t) = Re^{it}$ für $t \in [0, \pi]$, dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{1,R}} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}} f(z) dz$$

Der Weg $\gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}$ umrandet den Pol 2. Ordnung bei $z = i$ einmal in positive Richtung. Also gilt nach Residuensatz

$$\int_{\gamma_{1,R} + \gamma_{2,R}} f(z) ds = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

Für einen Pol 2. Ordnung kann man das Residuum direkt bestimmen. Es ist

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} \partial_z [(z - i)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow i} \partial_z (z + i)^{-2} = -2 \lim_{z \rightarrow i} (z + i)^{-3} = (4i)^{-1}.$$

Es gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx = \pi/2.$$