UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Frühjahr 2005
08.03.2005

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
— L ö s u n g e n —

Aufgabe 1

Wir bringen zunächst die erweiterte Koeffizientenmatrix $A\vec{x} = \vec{b}$ auf Dreiecksform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & b \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_2 : Z_2 + Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & b+4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2a & 1 \end{array}\right)$$

a) $\det A = -8a$
b) $\underline{a \neq 0} \Longrightarrow \det A \neq 0 \Longrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar. Wir berechnen sukzessive

$$x_1 = 1, \quad 4x_1 + x_2 = b + 4 \Longrightarrow x_2 = b, \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$$
$$\Longrightarrow x_3 = 3b - 2, \quad x_1 + x_2 - x_3 + 2ax_4 = 1 \Longrightarrow x_4 = \frac{b-1}{a},$$

und erhalten als eindeutig bestimmte Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 3b-2 \\ \dfrac{b-1}{a} \end{pmatrix}.$$

$\underline{a = 0}$: Wir betrachten das erweitere Koeffizientenschema von oben und verwenden elementare Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & b+4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 : \frac{1}{4}Z_1]{Z_2 : Z_2 - Z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4 : Z_4 - Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 : Z_4 + 2Z_2]{Z_4 : Z_4 + Z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b-2 \end{array}\right)$$

Es treten zwei Fälle auf:

$\underline{a = 0\,,\ b \neq 1 :}$ $\Longrightarrow$ Gleichungssystem unlösbar.

$\underline{a = 0\,,\ b = 1 :}$ Wir erhalten: $x_1 = x_2 = 1 \Longrightarrow x_3 = 1$ ($x_4 = 1$ frei wählbar!) .

Allgemeine Lösung in Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2

a) Da

$$\operatorname{grad} f = (2xe^{x^2-y^2}, \ -2ye^{x^2-y^2}),$$

und

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ergibt sich für die gefragte Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\right|_{\vec{x}_0} &= \operatorname{grad} f\big|_{\vec{x}_0} \cdot \vec{a} = (4e^3, -2e^3) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^3 \cdot 6 = 3\sqrt{2}e^3 \end{aligned}$$

b) Die Höhenlinien von f ergeben sich aus der Gleichung

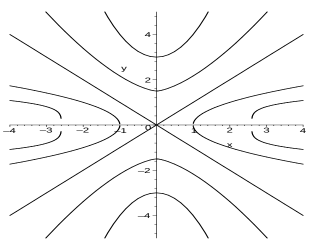
$$f(x,y) = e^{x^2-y^2} = c \iff x^2 - y^2 = \ln c \ (c > 0)$$

Wir untersuchen 3 Fälle:

i) $0 < c < 1 \Longrightarrow \ln c < 0 \Longrightarrow x^2 - y^2 = \ln c < 0 \Longrightarrow y^2 - x^2 = -\ln c > 0$,
es ergeben sich Hyperbeln die in y–Richtung nach oben bzw. nach unten geöffnet sind.

ii) $c = 1 \Longrightarrow \ln c = 0 \Longleftrightarrow x = \pm y$,
dies sind die beiden Winkelhalbierenden.

iii) $c > 1 \Longrightarrow x^2 - y^2 = \ln c > 0$,
die Hyperbeln sind nun in Richtung der x–Achse geöffnet.
Skizze:



c) Da $\operatorname{grad} f \mid_{\vec{x}_0}$ in jedem Punkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ einer Höhenlinie Normalenvektor auf ihr ist, ist nach **a)**

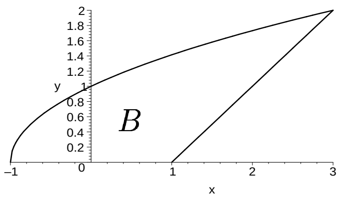
$$\vec{t} = e^{x^2-y^2} \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \end{pmatrix}$$

Tangentenvektor für die Höhenlinie. Damit $\vec{v}$ auf den Höhenlinien senkrecht steht muss

$$\vec{t} \cdot \vec{v} = e^{x^2-y^2} \begin{pmatrix} 2y \\ 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{y^2-1}{y} \\ x \end{pmatrix} = 2e^{x^2-y^2}(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

erfüllt sein. Dies sind genau die Punkte des Einheitskreises in der x,y–Ebene.

Aufgabe 3



a) Wir können B durch

$$B = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 2\,,\ y^2 - 1 \le x \le y+1\}$$

beschreiben. Damit ist B in x–Richtung projizierbar.

b) Nach a) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\iint_B \frac{x}{y+1}\,dB &= \int_0^2 \int_{y^2-1}^{y+1} \frac{x}{y+1}\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2(y+1)}\Bigg|_{y^2-1}^{y+1} \right) dy = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(y+1-(y+1)(y-1)^2\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 (2y+y^2-y^3)\,dy \\
&= \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Integrabilitätsbedingung:

$$\begin{aligned}
v_{1,y} = g' + xg'' = g' = v_{2,x} &\implies xg'' = 0 \\
&\implies g(y) = ay + b \quad (a,b \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Damit sind die

$$\vec{v}_g(x,y) = \begin{pmatrix} a(x+y)+b \\ ax-2 \end{pmatrix}$$

sämtliche Potentialfelder.

b) $F_{g,x} = a(x+y)+b \implies F_g = \frac{1}{2}ax^2 + axy + bx + c(y)$

$\implies F_{g,y} = ax + c'(y) = ax - 2 \implies c(y) = -2y + C$

$\implies F_g(x,y) = \frac{1}{2}ax^2 + axy + bx - 2y + C$ mit $a,b,C \in \mathbb{R}$ sind die zugehörenden Potentialfunktionen.

c) Aus

$$\operatorname{grad} F_g\big|_{(1,-1)} = \vec{v}_g(1,-1) = \begin{pmatrix} b \\ a-2 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

folgt $a = 2$, $b = 0$. Also besitzen alle

$$F_g(x,y) = x^2 + 2xy - 2y + C$$

in $(1,-1)$ einen stationären Punkt.

d) Da $\vec{v}_g$ als Potentialfeld vorausgesetzt ist, ergibt sich aus b)

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{v}_g(\vec{x}) d\vec{x} &= F_g(0,0) - F_g(-1,-1) \\ &= -\frac{3}{2}\, a + b - 2\,. \end{aligned}$$