VD F2006 HMII Lösungen

Aufgabe 1

a) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda E) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2$

A hat die EW $\lambda_1 = 1$ (algebr Vielfachheit 2), $\lambda_2 = 2$ (alg Vielf 1).

Eigenräume:

E_{λ_1}: $\quad \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow E_{\lambda_1} = \left\{ v = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

λ_1 hat geometr Vielfachheit 1

$\neq$ algebr Vielfachheit 2 $\rightarrow$ A ist nicht diagon.

$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(B - \lambda E) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

B hat die EW $\lambda_1 = 1$ (algebr Vielf 2), $\lambda_2 = 2$ (algebr Vielf 1)

Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$: $\quad \text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow$ geom Vielf 2

Basis für E_{λ_1}: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$: Lösungen von $(B - 2E)\vec{v} = \vec{0}$: Vielfache von $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bei B stimmen für die EW algebr und geom Vielfachheit überein: B ist diagonalisierbar.

---

b) Mit C (Spalten sind l.u. Eigenvektoren) $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

gilt $\quad C^{-1} B C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

$f(x,y) = y^3 - 6y^2 - 3x^2 + 10$

a)

stationäre Stellen:

$\nabla f(x,y) = 0$, d.h. $\begin{pmatrix} -6x \\ 3y^2 - 12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösungen: $(0,0)$ und $(0,4)$

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6y-12 \end{pmatrix}$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ ist negativ definit.

In $(0,0)$ liegt also ein lokales Maximum.

$H_f(0,4) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ ist indefinit.

In $(0,4)$ liegt also ein Sattelpunkt.

b)

Lagrange Ansatz:

$$\begin{aligned} -6x &= 2\lambda x && (1) \\ 3y^2 - 12y &= 4\lambda y && (2) \\ x^2 + 2y^2 &= 50 && (3) \end{aligned}$$

1. Fall: $x = 0 \xrightarrow{(3)} y = \pm 5$

2. Fall: $x \neq 0 \xrightarrow{(1)} \lambda = -3$

$\xrightarrow{(2)} y = 0$

$\xrightarrow{(3)} x = \pm 5\sqrt{2}$

$(0, 5) = -15$

$(0, -5) = -265$

$(\pm 5\sqrt{2}, 0) = -140$

$(0, 0) = 10$

Also: $((0,0), 10)$ ist das absolute Maximum und $((0,-5), -265)$ ist das absolute Minimum von f auf B.

VD F 2006 HM II Lösungen

Aufgabe 3

a) Gauss Integralsatz: $\underline{\iint\limits_{\partial G} \vec{F}\cdot d\vec{o} = \iiint\limits_{G} \nabla\cdot\vec{F}\, d\tau}$ $\underline{(*)}$

$$= \iiint\limits_{G} (y+z)\, d(x,y,z) = \left(\begin{array}{c}\text{Zylinderkoordinaten}\\ (x,y,z)\to(r,\varphi,z)\end{array}\right)$$

$$= \int\limits_{z=0}^{1}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{2z}}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (r\sin\varphi + z)\, r\, d\varphi\, dr\, dz$$

$$= \int\limits_{z=0}^{1}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{2z}}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} z r\, dr\, d\varphi\, dz = 2\pi\int\limits_{z=0}^{1} z\,\frac{1}{2}\,2z\, dz = \underline{2\frac{\pi}{3}}$$

b) $\underline{\iint\limits_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{o}} = \iint\limits_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, do = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\le 2\\ z=1}} \vec{F}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} d(x,y)$

Polarkoordinaten $\overset{\downarrow}{=} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} \underbrace{r\cos\varphi\, r^2\sin^2\varphi}_{x y^2}\, \underbrace{r\, dr\, d\varphi}_{d(x,y)}$

$$= \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} r^4\, dr \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi\, \sin^2\varphi\, d\varphi \;\; \underline{=0}$$

c) Da $\partial G = S_1 \cup S_2$ und $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ gelten, folgt aus a) $\underline{(*)}$ und b):

$$\underline{\iint\limits_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{o}} = \iint\limits_{\partial G} \vec{F}\cdot d\vec{o} - \iint\limits_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{o} = \underline{2\pi\frac{1}{3}}$$

VD F2006 HM II Lösungen

Aufgabe 4

a) $\vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in J$, sei Parametrisierung von ∂G:

$$\int_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{t \in J} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}\, dt = \int_{t \in J} \frac{x^2(t)}{y(t)} \dot{x}(t)\, dt \quad \boxed{*}.$$

$$\partial G = g_1 \cup g_2 \cup g_3 : \quad g_1: \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \; 1 \le t \le 2$$

$$g_2: \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}, \; 2 \le t \le 4$$

$$g_3: \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \; t: 2 \to 1$$

$$\boxed{*} \rightarrow \underline{\int_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}} = \underbrace{\int_1^2 \frac{t^2}{t} dt}_{= 3/2} + \underbrace{\int_2^4 \frac{4}{t} 0\, dt}_{= 0} + \underbrace{\int_2^1 \frac{t^2}{t^2} dt}_{= -1} = \underline{\frac{1}{2}}$$

b) Gauss Integralsatz

$$\underline{\int_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial G} \frac{x^2}{y} dx} = -\iint_G \left(\frac{x^2}{y}\right)_y d(x,y)$$

$$= \int_{x=1}^{2} \int_{y=x}^{x^2} \frac{x^2}{y^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=1}^{2} \left(-\frac{x^2}{y} \Big|_{y=x}^{x^2} \right) dx$$

$$= \int_{x=1}^{2} (-1 + x)\, dx = -x + \frac{1}{2}x^2 \Big|_1^2 = \underline{\frac{1}{2}}$$