Vordiplom HM II 15.3.2007 Lösungen

Aufgabe 1

Umformen mit dem Gaußschen Algorithmus (Zeilennormalform):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & b_2 \\ 1 & 7 & 2 & 6 & b_3 \end{array}\right) \longrightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 9 & -15 & b_1 - 5b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 - 2b_2 \end{array}\right)}_{(*)}$$

a) Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ist $A\vec{x} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 9x_3 - 15x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \end{array}$

Mit $x_3 = s,\ x_4 = t \Rightarrow$: $\vec{x} \in \mathrm{Kern}(A) \Longleftrightarrow \vec{x} = s\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R}$ $(**)$

Basis von Kern(A): $\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dim \mathrm{Kern}(A) = 2$

$(*) \rightarrow \mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Bild}(A) = 2 \rightarrow$ Basis von Bild(A): $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Aus $(*)$ lesen wir ab: $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar $\Longleftrightarrow b_3 = b_1 + 2b_2$

(oder: $\vec{b} = b_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Bild}(A)$)

c) Aus $(*)$ mit $x_3 = s,\ x_4 = t$ erhält man

$x_1 = b_1 - 5b_2 - 9s + 15t$

$x_2 = b_2 + s - 3t$

$x_3 = s,\ x_4 = t$

$s = t = 0$ liefert eine Lösung $\vec{x}_p = \begin{pmatrix} b_1 - 5b_2 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der inhomogenen Gleichung

Mit $(**)$ (= allgemeine Lösung der homogenen Gleichung) erhält man die allgemeine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ (für $\vec{b} \in \mathrm{Bild}(A) \mid b_3 = b_1 + 2b_2$)

$$\vec{x}_{allg} = \vec{x}_p + s\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ s,t \in \mathbb{R}.$$

Vordiplom HM II   15.3.2007   Lösungen

Aufgabe 2

a) $\chi(\lambda) = \det(A_\alpha - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 1 & \alpha-\lambda & 0 \\ -3 & \alpha+2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \; -②$ ① 1. Schritt ② 2. Schritt

$+①$

$$= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & \alpha-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (\alpha-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+4)$$

Entwickeln nach der 2. Spalte

A_α hat die EW $\alpha, 2, -4$

b) 1. Fall: Für $\alpha \neq 2$ und $\alpha \neq -4$ hat A_α 3 verschiedene EW, so dass A_α in diesen Fällen diagonalisierbar ist.

2. Fall: $\alpha = 2$ (EW der algebr. Vielfachheit 2)

$$A_2 - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \operatorname{rang}(A_2 - 2E) = 2 \to \text{geometr. Vielfachh.} = 1 \neq 2$$

l.u. l.a.

$\to$ A_2 ist nicht diagonalisierbar

$\alpha = -4$ (algebr. Vielfachheit 2)

$$\operatorname{rang}(A_{-4} + 4E) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \to \text{geometr. Vielfachheit } 1 \neq 2$$

A_{-4} ist nicht diagonalisierbar

c) $0, 2, -4$ sind die EW von $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Zu $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ gehört $S = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$, wobei $\vec{v}_1$ EV zu 0, $\vec{v}_2$ EV zu 2, $\vec{v}_3$ EV zu -4 ist.

EV $\vec{v}_1$ zu 0: $A_0 \vec{v}_1 = \vec{0} \to \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV $\vec{v}_2$ zu 2: $(A_0 - 2E)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\vec{v}_2 = \vec{0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{v}_2 \to \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

EV $\vec{v}_3$ zu -4: $(A_0 + 4E)\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\vec{v}_3 = \vec{0} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{v}_3 \to \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\to \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) $\nabla f = \vec{0} = \begin{pmatrix} 2x \\ 6y - 3y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y(2-y) \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ $(0,0)$ und $(0,2)$ sind die stationären Punkte von f

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6-6y \end{pmatrix}$: $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ist positiv definit

$\rightarrow$ In $(0,0)$ liegt ein lokales Minimum

$f(0,0) = -4$.

$H_f(0,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ ist indefinit. $\rightarrow$ In $(0,2)$ besitzt f einen Sattelpunkt.

b) Gesucht sind Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) := x^2 + 3y^2 - 3 = 0$. Mit (Lagrange Ansatz) $L := f - \lambda g$ werden

$$\partial_x L = 2x - 2x\lambda = 2x(1-\lambda) = 0$$
$$\partial_y L = 3y(2-y) - 6\lambda y = -3y^2 + 6y(1-\lambda) = 0$$
$$\partial_\lambda L = x^2 + 3y^2 - 3 = 0$$

gebildet.

(1) $x \neq 0 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow y = 0$ und $x = \pm\sqrt{3}$

$f(\pm\sqrt{3}, 0) = -1$: Wegen $f(0,0) = -4$ liegt für $f|_K$ in $(\pm\sqrt{3}, 0)$ kein Minimum.

(2) $x = 0 \rightarrow y = \pm 1$: $f(0,1) = -2$

$f(0,-1) = 0$

$\rightarrow$ Das Minimum von $f|_K$ liegt in $(0,0)$: $f(0,0) = -4$

Das Maximum von $f|_K$ wird in $(0,-1)$ angenommen: $f(0,-1) = 0$

Vordiplom HM II 15.3.2007 Lösungen

Aufgabe 4

a) $\iint_{\partial K} \vec{F} \cdot d\vec{o} \underset{\uparrow}{=} \iiint_K \nabla \cdot \vec{F} \, d\tau = \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \le 1+z} (2+2x-z) \, d(x,y) \right) dz$

Gauß Integralsatz

Zylinderkoordinaten $\overset{\wedge}{=} \int_0^1 \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{1+z}} (2+2r\cos\varphi - z) \, r \, dr \, d\varphi \right) dz$

$\left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0 \right) \overset{\wedge}{=} 2\pi \int_{z=0}^{1} \int_{r=0}^{\sqrt{1+z}} (2r - rz) \, dr \, dz = \underline{\frac{13}{6}\pi}$

b) $\underline{d\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d(x,y)} \rightarrow \underline{\iint_{D_1} \vec{F} \cdot d\vec{o}} = \iint_{x^2+y^2 \le 2} \begin{pmatrix} 2x+y^2+1 \\ 2xy \\ x-\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d(x,y)$

$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{2}} \left(r\cos\varphi - \frac{1}{2} \right) r \, dr \, d\varphi = \underline{-\pi}$

c) Parametrisieren von ∂D_0: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$ $(0 \le t \le 2\pi)$

$\int_{\partial D_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos t + \sin^2 t \\ 2\cos t \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (-\sin 2t - \sin^3 t + 2\cos^2 t \sin t) \, dt$

$\underline{= 0}$ (Bronstein / Periodizität von sin, cos)

Mit Satz von Stokes:

$\int_{\partial D_0} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_{D_0} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{o} = 0$

$\underline{\text{da } \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-1 \\ 2y-2y \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ ist.}}$