Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Im $\mathbb{C}^4$ sind die Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei $V_\beta := \mathrm{Lin}(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ sowie $W := \mathrm{Lin}(\vec{a}_3, \vec{a}_4)$.

a) Berechnen Sie alle Zahlen $\beta \in \mathbb{C}$, für die $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ linear abhängig sind.

b) Geben Sie die Zahlen β an, für die $V_\beta \cap W = \phi$ gilt, und die β, für die $V_\beta \cap W = \{\vec{0}\}$ erfüllt ist.

c) Geben Sie alle Elemente aus $V_0 \cap W$ an.

d) Geben Sie alle Elemente $\vec{x}$ der Form $\vec{x} = \vec{v}_2 + \vec{w}$ mit $\vec{v}_2 \in V_2$ und $\vec{w} \in W$ an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume für die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie die geometrische und die algebraische Vielfachheit der jeweiligen Eigenwerte an.

c) Geben Sie die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren von M an.

d) Entscheiden Sie, ob M diagonalisierbar ist. Begründen Sie dies auf zwei Arten.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich D des Integrals

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \right) dx$$

in der (x, y)–Ebene.

b) Beschreiben Sie D aus a) durch Polarkoordinaten: Bestimmen Sie eine Funktion $r_1 = r_1(\varphi)$ und Grenzen φ_1, φ_2, so dass

$$D = \{(r, \varphi) \mid 0 \le r \le r_1(\varphi), \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}$$

gilt.

c) Berechnen Sie I durch Transformation auf Polarkoordinaten.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es sind

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 25\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \ge 3\}$$

und

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ 1 \end{pmatrix} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ,$$

gegeben.

Berechnen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch die Randfläche ∂K von K nach außen

a) durch ein Integral über ∂K und

b) durch ein Integral über K.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die **Ergebnisse** der Vordiplomklausuren hängen ab Donnerstag, dem **20.03.08**, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

im Internet.

Die **Klausureinsicht** findet für **diejenigen**, die sich einer **mündlichen** Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem **15. April 08**, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.

Die **Nachprüfungen** selbst sind in der Woche vom **21.04.08** bis **25.04.08**.

Die **allgemeine Klausureinsicht** findet am Mittwoch, **30.04.08**, von 15.45 bis 17.15 Uhr im Seminarraum S 34 statt.