Aufgabe 1 Unabhängig von β hat man sofort $\dim V_\beta = 2$. Ebenso $\dim W = 2$ $\boxed{(*)}$

a) Es sind die β gesucht, für die $\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = 0$ gilt:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ \beta & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & -1 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & \beta-1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta-1 & 1 \end{pmatrix} = \beta(\beta-1)$$

$\rightarrow$ genau für $\beta = 0$ und $\beta = 1$ sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ l. a.

b) V_β und W haben als Vektorräume mindestens den Nullvektor gemeinsam: $V_\beta \cap W = \emptyset$ trifft für kein β zu.

Gilt $\vec{v} \in V_\beta \cap W$, so gibt es Zahlen x_1, x_2 und x_3, x_4 derart, dass $\vec{v} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 = x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4$ gilt. Wegen $(*)$ ist $\vec{v} = \vec{0}$ nur für $x_1 = x_2 = 0$ und $x_3 = x_4 = 0$ möglich, also nur, falls das Gleichungssystem $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, -\vec{a}_3, -\vec{a}_4]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$ nur trivial lösbar ist. Das ist nach a) für alle $\beta \neq 0$ und $\beta \neq 1$ der Fall.

c) $\vec{v} \in V_0 \cap W \Longleftrightarrow \vec{v} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow x_1 = x_4,\ x_2 = -x_3,\ x_3 = x_4$

$\Rightarrow$: $\vec{v} \in V_0 \cap W \Longleftrightarrow \vec{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{C}$

d) Nach a) ist $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ für $\beta = 2$ eine Basis des $\mathbb{C}^4$.
Jedes $\vec{x} \in \mathbb{C}^4$ hat somit die Form $\vec{x} = \underbrace{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2}_{\in V_2} + \underbrace{x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4}_{\in W}$

Aufgabe 2) a)/b)

$$0 = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -3+\lambda & 3-\lambda & 0 \\ -3 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3-\lambda & -1 \\ \lambda-3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)$$

also: $0 = (3-\lambda)(\lambda-2)^2$

Die EW sind $\underline{\lambda_1 = 3}$ mit der algebr. Vielfachheit 1 und

$\underline{\lambda_2 = 2}$ mit der algebr. Vielfachheit 2.

Eigenraum zu λ_1: E_{λ_1}: $(M-3E)\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$

also: $v_1 = 0$, $2v_2 = v_3$: $\underline{E_{\lambda_1} = \{\vec{v} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}}$

$\dim E_{\lambda_1} = \underline{1 = \text{geometrische Vielfachheit von } \lambda_1}$

E_{λ_2}: $(M-2E)\vec{v} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$

also: $v_2 = v_3$, $v_1 = v_3$: $\underline{E_{\lambda_2} = \{\vec{v} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}}$

$\dim E_{\lambda_2} = \underline{1 = \text{geometrische Vielfachheit von } \lambda_2}$

c) M besitzt maximal $\underline{2}$ l.u. EV, etwa (siehe oben E_{λ_1}, E_{λ_2}): $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

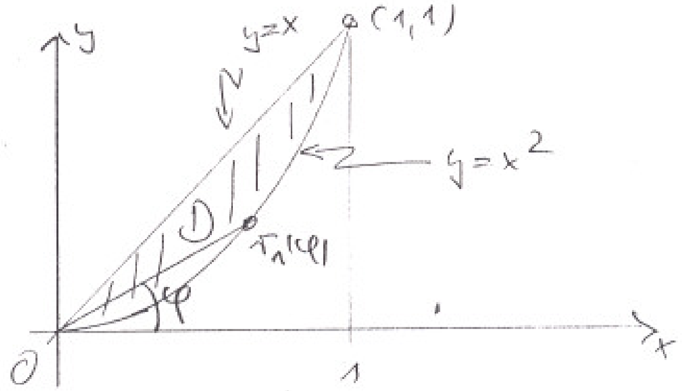
d) M ist <u>nicht diagonalisierbar</u>, denn andernfalls:

$\underline{1.}$ M müsste $\underline{3}$ l.u. EV besitzen, hat aber nur 2

oder $\underline{2.}$ für jeden EW müssten die geom und algebr Vielfachheit übereinstimmen. Für λ_2 ist dies nicht der Fall (s. oben).

Aufgabe 3)

a)



$$D = \{(x,y) \mid x^2 \le y \le x \,,\; 0 \le x \le 1\}$$

b) $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$

$y = x \quad \longleftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

$y = x^2 \quad \longleftrightarrow \quad r\sin(\varphi) = r^2\cos^2(\varphi) \,,\quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

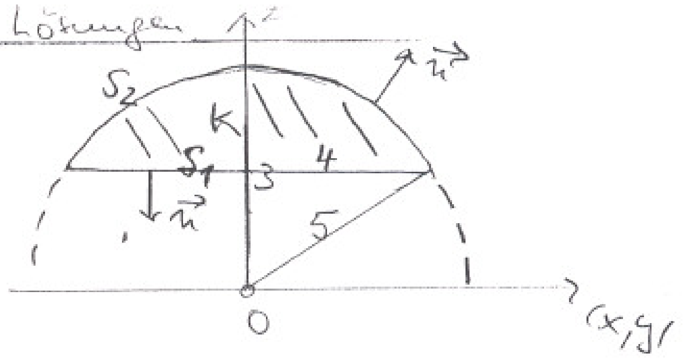
$0 \le x \le 1 \quad \longleftrightarrow \quad r = r_1(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \,,\quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

$$D = \left\{(r,\varphi) \;\middle|\; 0 \le r \le \frac{\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \,,\; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\right\}$$

c) $$I = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=0}^{\frac{\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}} \frac{1}{r}\, r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} \, d\varphi \underset{u=\cos\varphi}{=} -\int_1^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{du}{u^2}$$

$$= \frac{1}{u}\Big|_1^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$



Aufgabe 4)

$\Phi :=$ Fluss durch ∂K nach außen

$$= \underbrace{\iint_{\partial K} \vec v \cdot d\vec o}_{a)} \underset{\substack{\text{Gauss} \\ \text{Integralsatz}}}{\overset{\uparrow}{=}} \underbrace{\iiint_K \nabla \cdot \vec v \, d\tau}_{b)}$$

mit $d\vec o = \vec n \, do$, $\|\vec n\| = 1$, Richtung nach außen

a) $\partial K = S_1 \cup S_2$, $S_1 = \{(x,y,z) \mid z = 3, x^2+y^2 \le 16\}$, $\vec n_{|S_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $do = d(x,y)$

$S_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 25, z \ge 3\}$, $\vec n_{|S_2} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x^2+y^2+z^2 = 25$

mit $z = h(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$, $x^2+y^2 \le 16$ gibt

$do_{|S_2} = \sqrt{1+h_x^2+h_y^2}\, d(x,y) = \frac{5}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\, d(x,y) = \frac{5}{h(x,y)}\, d(x,y)$

$$\rightarrow \underline{\iint_{\partial K} \vec v \cdot d\vec o} = \iint_{S_1} \cdots + \iint_{S_2} \cdots = \iint_{x^2+y^2 \le 16} \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} d(x,y)$$

$$+ \iint_{x^2+y^2 \le 16} \frac{5}{h(x,y)} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{z = h(x,y)} d(x,y)$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 16} (-1)\, d(x,y) + \iint_{x^2+y^2 \le 16} (x^2+y^2+1)\, d(x,y) = -16\pi + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} (r^2+1)\, r \, dr \, d\varphi$$

$$\underline{= 128\pi}$$

b) $\nabla \cdot \vec v = 2z$: $\underline{\iiint_K \nabla \cdot \vec v \, d\tau} = \iint_{x^2+y^2 \le 16} \int_{z=3}^{\sqrt{25-x^2-y^2}} 2z \, dz \, d(x,y)$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le 16} (25-x^2-y^2-9)\, d(x,y) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} (16-r^2)\, r \, dr \, d\varphi = \underline{128\pi}$$