Diplom–Vorprüfung / Bachelor
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Im Vektorraum $C^2([-\pi,+\pi])$ der auf $[-\pi,+\pi]$ zweimal stetig differenzierbaren Funktionen sind die Funktionen v_j $(j = 1,2,3,4)$ durch $v_1(x) = \sin(x)$, $v_2(x) = \cos(x)$, $v_3(x) = x\sin(x)$, $v_4(x) = x\cos(x)$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ eine Basis des Vektorraumes $W := \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ ist.

b) Begründen Sie, dass der Differentiationsoperator D, der durch $Df = f'$ definiert ist, eine lineare Abbildung von W nach W ist.

c) Berechnen Sie die Matrizen von $D : W \to W$ und $D^2 : W \to W$ bezogen auf die Basis B (Bemerkung: $D^2(v) = D(D(v))$).

d) Berechnen Sie $D^2(2x\sin(x) + 5\cos(x))$ mittels der Matrix aus c).

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 2\alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von M_α. Geben Sie zu jedem Eigenwert die algebraische Vielfachheit an.

b) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die M_α diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Berechnen Sie den maximalen Wert, den $f(x,y,z) := 3x + 2y + z$ unter den Nebenbedingungen $x - y + z = 1$ und $x^2 + y^2 = 1$ annimmt.
Begründen Sie, dass dieses Maximum existiert.

– bitte wenden –

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Es sind

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{x} + y \\ x + z \\ \ln(x) + y + 2z \end{pmatrix}, \quad x > 0,$$

und die Kurve γ im $\mathbb{R}^3$ durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^2(2\pi t) + 1 - (2t-1)^2 \\ t^6 + 4t^3 - 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + (t - t^2)e^t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1,$$

gegeben.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$.

b) ∂P sei der positiv orientierte Rand von

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}.$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\partial P} \begin{pmatrix} x^2 + y^3 \\ 3xy^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s}$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, **01. April 2009**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer **mündlichen** Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, den **21.04.2009**, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude 20.30) statt.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom **27.04.2009** bis **30.04.2009** im Allianzgebäude 05.20.

Die **allgemeine** Klausureinsicht (siehe Aushang) findet am Mittwoch, den **22.04.2009**, von 14.00 bis 16.00 Uhr im Eiermann–Hörsaal (Geb. 20.40) statt.