Aufgabe 1

a) Es ist zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3, v_4 in $C^2[-\pi,+\pi]$ l.u. sind:

Mit Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 gelte $c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 x \sin x + c_4 x \cos x = 0$, $-\pi \le x \le \pi$.

Setze $x=0 \to \underline{c_2 = 0}$. Differenziere $c_1 \sin x + c_3 x \sin x + c_4 x \cos x = 0$ (1)

$c_1 \cos x + c_3 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 \cos x - c_4 x \sin x = 0$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \xrightarrow{(2)} c_1 + c_4 = 0 \\ x=\frac{\pi}{2} \xrightarrow{(2)} c_3 - \frac{\pi}{2} c_4 = 0 \\ \xrightarrow{(1)} c_1 + c_3 \frac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right\} \to \underline{c_1 = c_3 = c_4 = 0} \checkmark$$

b) Die Differentiation ist linear: $D(\alpha f + \beta g) = \alpha Df + \beta Dg$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^2[-\pi,+\pi]$

Es ist zu zeigen, dass für $f \in W$ gilt $Df \in W$:

$D(c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 x \sin x + c_4 x \cos x)$ $\quad (c_i \in \mathbb{R})$

$= (c_3 - c_2) \sin x + (c_1 + c_4) \cos x - c_4 x \sin x + c_3 x \cos x \in W$ $\checkmark$

c) Zu $w = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 x \sin x + c_4 x \cos x$ gehört $\vec{w} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$.

Nach b) gilt
$$D\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3 - c_2 \\ c_1 + c_4 \\ -c_4 \\ c_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Die } D \text{ repräsentierende Matrix } M(D).} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

Es ist $D^2(\sin x) = -\sin x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D^2(\cos x) = -\cos x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$D^2(x \sin x) = 2\cos x - x \sin x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $D^2(x \cos x) = -2\sin x - x\cos x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

noch
(zu Aufgabe 1)

$$M(D^2)\left(=(M(D))^2\right)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

d) $D^2(2x\sin x+5\cos x)=D^2\begin{pmatrix}0\\5\\2\\0\end{pmatrix}=M(D^2)\begin{pmatrix}0\\5\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\0\end{pmatrix}$

$=-\cos x-2x\sin x$

Aufgabe 2 Mit a_λ wird die algebraische Vielfachheit und mit g_λ die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ bezeichnet.

a)
$$0 = \det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & \alpha & 4 & -2 \\ 0 & -\lambda & -1 & -1 \\ 0 & -\alpha & 2\alpha-\lambda & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & \alpha-1-\lambda \end{pmatrix} + ①$$

$-②$

$$= \det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & \alpha & 6 & -2 \\ 0 & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\alpha & 2\alpha-1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix} = (\alpha-\lambda)^2(-\lambda)(2\alpha-1-\lambda)$$

Eigenwerte $\lambda_1 = \alpha$ (doppelt)
$\lambda_2 = 0$
$\lambda_3 = 2\alpha - 1$

Für $\underline{\alpha = 1}$ ist $\lambda_1 = 1$ Eigenwert mit $a_1 = 3$
$\lambda_2 = 0$ $a_0 = 1$

$\underline{\alpha = 0}$ ist $\lambda_1 = 0$ Eigenwert mit $a_0 = 3$
$\lambda_2 = -1$ Eigenwert mit $a_{-1} = 1$

$\underline{\alpha = \frac{1}{2}}$ ist $\lambda_1 = 0$ Eigenwert mit $a_0 = 2$
$\lambda_2 = \frac{1}{2}$ Eigenwert mit $a_{\frac{1}{2}} = 2$

$\underline{\alpha \neq 1, \alpha \neq \frac{1}{2}, \alpha \neq 0}$ $\lambda_1 = \alpha$ Eigenwert mit $a_\alpha = 2$
$\lambda_2 = 0$ " " $a_0 = 1$
$\lambda_3 = 2\alpha - 1$ " " $a_{2\alpha-1} = 1$

b) M_α ist diagonalisierbar genau dann, wenn

$$g_\lambda = a_\lambda \quad \text{gilt für jeden Eigenwert.}$$

Ist $a_\lambda = 1$, so ist auch $g_\lambda = 1$. Es ist

$$g_\lambda = n - \text{rang}(M_\alpha - \lambda E) \quad \text{mit } n = 4.$$

$\underline{\alpha = 1}$, $\underline{\lambda = 1}$:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow g_1 = 1 \neq 3$$

M_1 ist nicht diagonalisierbar

$\underline{\alpha = 0, \lambda = 0}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow g_0 = 2 \neq 3$$

M_0 ist nicht diagonalisierbar

$\underline{\alpha = \frac{1}{2}}$, $\underline{\lambda = 0}$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \rightarrow g_0 = 1 \neq 2$$

$M_{\frac{1}{2}}$ ist nicht diagonalisierbar.

$\alpha \neq \frac{1}{2}, \alpha \neq 1, \alpha \neq 0$

Es ist $\lambda = \alpha$ mit $a_\alpha = 2$ zu untersuchen. Für die α, für die $\operatorname{rang}(M_\alpha - \alpha E) = 2$ gilt, ist M_α diagonalisierbar.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 4 & -2 \\ 0 & -\alpha & -1 & -1 \\ 0 & -\alpha & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -\alpha & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & \alpha+4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$= 2$ genau für $\underline{\alpha = -3}$

Ergebnis: $\underline{M_{-3} \text{ ist diagonalisierbar}}$

$\underline{M_\alpha \text{ ist für } \alpha \neq -3 \text{ nicht diagonalisierbar.}}$

HM II 16. 3. 2009 Lösungen

Aufgabe 3

Für $f(x,y,z) = 3x + 2y + z$ ist das Maximum gesucht unter den NB $g_1(x,y,z) = x - y + z - 1 = 0$, $g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Die (x,y,z), die $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$ genügen, liegen auf einer Ellipse im Raum (Schnitt von Ebene $g_1 = 0$ mit Zylinder $g_2 = 0$). Dies ist eine abgeschlossene und beschränkte Menge, auf der die stetige Funktion f ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

Lagrange Multiplikatorenansatz:

$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g_1(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z)$ liefert

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Mit $g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0$ folgt:

$$\rightarrow \lambda_1 = 1, \; x = \frac{1}{\lambda_2}, \; y = \frac{3}{2\lambda_2} \xrightarrow{g_2 = 0} \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{9}{4}\frac{1}{\lambda_2^2} = 1 \rightarrow \lambda_2 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

$$\rightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{13}}, \; y = \pm \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ und } (g_1 = 0) \; z = 1 - x + y$$

oder $z = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{13}}$. Man erhält die beiden Punkte

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Mit $f(\vec{x}_1) = 1 + \sqrt{13}$, $f(\vec{x}_2) = 1 - \sqrt{13}$, so dass

$$f(\vec{x}_1) = \max\{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \text{ mit } g_1(x,y,z) = g_2(x,y,z) = 0\}.$$

HM II 16.3.2005 Lösungen

Aufgabe 4

a) Mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gelten: $D_1 v_2(x,y,z) = 1 = D_2 v_1(x,y,z)$,

$D_1 v_3(x,y,z) = \frac{1}{x} = D_3 v_1(x,y,z)$, $D_2 v_3(x,y,z) = 1 = D_3 v_2(x,y,z)$.

Da der Halbraum $x > 0$ einfach zusammenhängend ist, ist $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z)$ in $x > 0$ ein Potentialfeld. Wir berechnen eine Potentialfunktion $\phi = \phi(x,y,z)$:

$D_1 \phi = \frac{z}{x} + y \ (= v_1) \to \phi(x,y,z) = z \ln(x) + yx + h(y,z)$

$\underbrace{D_2 \phi = x + z \ (= v_2) \qquad D_2 \phi = x + D_1 h(y,z)}$

$\to h(y,z) = zy + g(z) \to \phi(x,y,z) = z \ln(x) + yx + zy + g(z)$

$D_3 \phi = \ln(x) + \underbrace{y + 2z \ (= v_3) \to \qquad D_3 \phi(x,y,z) = \ln(x) + y} + g'(z)$

$\to g(z) = z^2$

also $\phi(x,y,z) = z \ln(x) + yx + zy + z^2$

$\to \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \phi(\vec{r}(1)) - \phi(\vec{r}(0))$

$= \phi(1,4,1) - \phi(1,-1,0) = \underline{10}$

b) ∂P ist geschlossene stückweise glatte Kurve und $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^3 \\ 3xy^2 \end{pmatrix}$ ist in $\mathbb{R}^2$ ein Potentialfeld.

Es gilt also: $\oint_{\partial P} \begin{pmatrix} x^2 + y^3 \\ 3xy^2 \end{pmatrix} \cdot d\vec{s} = 0.$