Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2010
03.03.2010

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.

b) Untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist. Ermitteln Sie, falls möglich, eine reguläre Matrix S so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat, und bestimmen Sie $S^{-1}AS$.

c) Gibt es eine von der Nullmatrix verschiedene 3×3 - Matrix B, für die

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt? Falls ja, geben Sie ein derartiges B an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^2y^2 + 3y^2 - 6y\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema von f und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

b) Untersuchen Sie, ob die Funktion f auf der Menge

$$M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$$

Maximum und Minimum annimmt, und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + x \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene das Kurvenintegral

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s},$$

wobei γ den positiv orientierten Rand der Menge

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 - 4 < y < 5\right\}$$

bezeichne.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} (1+2xy)g(xy) \\ 2x^2 g(xy) + 1 \end{pmatrix},$$

wobei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

Bestimmen Sie g so, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ ist und $g(0) = 2$ gilt, und ermitteln Sie für dieses g ein Potential von $\vec{v}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 6te^t, \qquad t \geqslant 0,$$

die den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad y'(0) = 1$$

genügt.

b) Berechnen Sie für $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ die folgenden Kurvenintegrale:

i) $$\int\limits_{|z+i|=3} \frac{z^3}{(z-1-3i)^2(z-1)}\, dz := \int_\gamma \frac{z^3}{(z-1-3i)^2(z-1)}\, dz \quad \text{mit } \gamma(t) := -i + 3e^{it};$$

ii) $$\int\limits_{|z-1|=2} z^3 e^{1/z^2}\, dz := \int_\gamma z^3 e^{1/z^2}\, dz \quad \text{mit } \gamma(t) := 1 + 2e^{it}.$$

Die Kurve, über die integriert wird, ist also jeweils die positiv orientierte Kreislinie.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Freitag, den 26.03.2010, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 14.04.2010, von 14:00 Uhr bis 16:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 19.04.2010 bis 23.04.2010 im Allianz-Gebäude 05.20.