Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2010
03.03.2010

**Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung**

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik**

**Lösungsvorschläge**

## Aufgabe 1

**a)** Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & -4-\lambda & 6 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 6 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (2-\lambda)\big((-4-\lambda)(5-\lambda)+18\big) = (2-\lambda)\big(\lambda^2-\lambda-2\big) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1),$$

also ist $-1$ Eigenwert von $A$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und 2 ist Eigenwert von $A$ mit algebraischer Vielfachheit 2. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(-1) = \operatorname{Kern}(A + I_3) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\},$$
$$E_A(2) = \operatorname{Kern}(A - 2I_3) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 6 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Insbesondere hat der Eigenwert $-1$ die geometrische Vielfachheit 1 und 2 die geometrische Vielfachheit 2.

**b)** Wie in **a)** gesehen, stimmen für jeden Eigenwert von $A$ geometrische und algebraische Vielfachheit überein. Daher ist $A$ diagonalisierbar, d.h. es gibt eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Um ein solches $S$ anzugeben, kann man in jedem Eigenraum eine Basis wählen und die Basisvektoren als Spalten in eine Matrix schreiben. Beispielsweise für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

weil in den ersten beiden Spalten von $S$ Basisvektoren von $E_A(2)$ und in der dritten Spalte ein Basisvektor von $E_A(-1)$ stehen.

**c)** Sei $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AB = \mathbf{0}$ (Nullmatrix). Da 0 kein Eigenwert von $A$ ist, ist $A$ regulär. Multiplikation von $AB = \mathbf{0}$ mit $A^{-1}$ von links führt auf $B = A^{-1}AB = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Also gibt es keine von der Nullmatrix verschiedene Matrix $B$ mit $AB = \mathbf{0}$.

**Aufgabe 2**

**a)** Zweimalige Anwendung der Kettenregel zeigt: $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Der Gradient von $f$ lautet

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x^3 + xy^2 \\ x^2y + 6y - 6 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Die erste Komponente von $\operatorname{grad} f(x,y)$ verschwindet genau dann, wenn $x(2x^2 + y^2) = 0$ gilt, also wenn $x = 0$ oder $2x^2 + y^2 = 0$ ist. Da Letzteres nur für $x = 0$ und $y = 0$ erfüllt ist, ergibt sich $x(2x^2 + y^2) = 0$ genau für $x = 0$.

Für $x = 0$ lautet die zweite Komponente von $\operatorname{grad} f(x,y)$: $6y - 6$. Genau für $y = 1$ ist diese $= 0$.

Damit ist $(0,1)$ der einzige kritische Punkt von $f$.

Die Hesse-Matrix von $f$ ist gegeben durch

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 + y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 + 6 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ hat die beiden positiven Eigenwerte $1, 6$ und ist somit positiv definit. Daher besitzt $f$ in $(0,1)$ ein lokales Minimum mit $f(0,1) = -3$.

**b)** Da $f$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig und $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt die Funktion $f$ auf $M$ ihr Maximum und Minimum an.

*1. Schritt:* Untersuchung von $f$ auf $\operatorname{inn} M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$.

Wir haben im **a)**-Teil gesehen, dass $f$ in $(0,1) \in \operatorname{inn} M$ ein lokales Minimum hat und keine weiteren lokalen Extremstellen auf $\mathbb{R}^2$ (und damit insbesondere auch auf $\operatorname{inn} M$) besitzt.

*2. Schritt:* Untersuchung von $f$ auf $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$.

Wir verwenden die Multiplikatorenregel von Lagrange: Ist

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(x,y) = x^2 + y^2 - 4,$$

definiert, dann gilt $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ sowie

$$h'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{rg} h'(x,y) < 1$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für $(x,y) \in S$ nicht vorkommt. Also gilt $\operatorname{rg} h'(x,y) = 1$ für alle $(x,y) \in S$.

Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + 3y^2 - 6y + \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Es gilt

$$\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x^3 + xy^2 + 2\lambda x \\ x^2y + 6y - 6 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{grad} L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$ ist äquivalent zu:

$$2x^3 + xy^2 + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$
$$x^2y + 6y - 6 + 2\lambda y = 0 \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{3}$$

1. Fall: $x = 0$. Dann ist stets (1) erfüllt. Aus Gleichung (3) folgt $y^2 = 4$, also $y = 2$ oder $y = -2$. Gleichung (2) ist im Fall $y = 2$ für $\lambda = -3/2$ und im Fall $y = -2$ für $\lambda = -9/2$ erfüllt.

2. Fall: $x \neq 0$. Gleichung (1) lautet dann $2x^2 + y^2 + 2\lambda = 0$. Setzt $x^2 = 4 - y^2$, was aus (3) folgt, hierin ein, so ergibt sich

$$2(4 - y^2) + y^2 + 2\lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 8 - y^2 + 2\lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{y^2 - 8}{2}.$$

Einsetzen in (2) ergibt

$$\begin{aligned} x^2 y + 6y - 6 + (y^2 - 8)y = 0 \quad &\overset{(3)}{\Longleftrightarrow} \quad (4 - y^2)y + 6y - 6 + (y^2 - 8)y = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2y - 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = 3. \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zu (3).

Fazit: $(0, 2)$ und $(0, -2)$ sind die einzigen Kandidaten für Extremstellen von $f$ auf $S$.

Ein Vergleich der Funktionswerte

$$f(0, 2) = 0, \qquad f(0, -2) = 24$$

zeigt unter Berücksichtigung des Ergebnisses aus dem 1. Schritt

$$\min_{(x,y)\in M} f(x, y) = -3 \qquad \text{und} \qquad \max_{(x,y)\in M} f(x, y) = 24.$$

## Aufgabe 3

**a)** Da alle partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig sind, gilt $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Die Menge $G$ ist offen und konvex, also ein Gebiet. Ferner besteht $\partial G$ aus endlich vielen regulären Kurven (Teil einer Parabel und einer Geraden). Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \iint_G \left(\partial_x(2xy + x) - \partial_y(y^2)\right) d(x, y) = \iint_G (2y + 1 - 2y)\, d(x, y) = \iint_G 1\, d(x, y) \\ &= \int_{-3}^{3} \int_{x^2-4}^{5} 1\, dy\, dx = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx = 36. \end{aligned}$$

**b)** Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $\vec{v}$ ein $C^1$-Vektorfeld ist, stellt $\vec{v}$ genau dann ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ dar, wenn die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind.

Ist $\vec{v}(x, y) =: \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix}$ gesetzt, so gilt für jedes $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial_2 v_1(x, y) &= 2xg(xy) + (1 + 2xy)g'(xy)x, \\ \partial_1 v_2(x, y) &= 4xg(xy) + 2x^2 g'(xy)y. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\partial_2 v_1(x, y) = \partial_1 v_2(x, y) \quad \Longleftrightarrow \quad 2xg(xy) + xg'(xy) = 4xg(xy) \quad \Longleftrightarrow \quad xg'(xy) = 2xg(xy).$$

Dies ist genau dann erfüllt, falls $g'(t) = 2g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, also genau für $g(t) = Ce^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Die Forderung $g(0) = 2$ führt auf $C = 2$.

Fazit: Ist $g(t) := 2e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, gesetzt, so gilt $g(0) = 2$ und $\vec{v}$ stellt ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ dar.

Nun berechnen wir ein zugehöriges Potential $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wegen $\partial_y f(x, y) = 4x^2 e^{2xy} + 1$ gilt $f(x, y) = 2xe^{2xy} + y + h(x)$ für eine differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_x f(x, y) = 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} + h'(x)$ und $\partial_x f(x, y) = v_1(x, y)$ folgt $h'(x) = 0$; dies ist beispielsweise für $h \equiv 0$ erfüllt. Somit gilt $\nabla f = \vec{v}$ für $f(x, y) = 2xe^{2xy} + y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

**Aufgabe 4**

**a)** Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung $y'' + 3y' + 2y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

besitzt die jeweils einfachen Nullstellen $-1$ und $-2$. Somit ist

$$\phi_1(t) := e^{-t}, \qquad \phi_2(t) := e^{-2t}$$

ein zugehöriges Fundamentalsystem und für die allgemeine Lösung $y_H$ der homogenen Gleichung ergibt sich $y_H = c_1\phi_1 + c_2\phi_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung $6te^{1\cdot t}$ lautet und 1 keine Nullstelle von $p$ ist, kann man eine spezielle Lösung $y_P$ der inhomogenen Gleichung $y'' + 3y' + 2y = 6te^t$ mit dem Ansatz $y_P(t) = (at + b)e^t$, $a, b \in \mathbb{R}$, erhalten. Dieser führt wegen

$$y_P'(t) = (at + a + b)e^t, \qquad y_P''(t) = (at + 2a + b)e^t$$

auf

$$(at + 2a + b) + 3(at + a + b) + 2(at + b) = 6t.$$

Koeffizientenvergleich ergibt $6a = 6$ und $5a + 6b = 0$, also $a = 1$ und $b = -5/6$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' + 3y' + 2y = 6te^t$ lautet deshalb

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + (t - 5/6)e^t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere ergibt sich

$$y(0) = c_1 + c_2 - 5/6 \qquad \text{sowie} \qquad y'(0) = -c_1 - 2c_2 + 1 - 5/6.$$

Es soll $y(0) = 1$ und $y'(0) = 1$ gelten, d.h. $c_1+c_2-5/6 = 1$ und $-c_1-2c_2+1-5/6 = 1$. Dies ist äquivalent zu $c_1 + c_2 = 11/6$ und $-c_1 - 2c_2 = 5/6$. Nach Addition dieser beiden Gleichungen sieht man $c_2 = -8/3$, was dann auf $c_1 = 9/2$ führt. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit gegeben durch

$$y(t) = 9/2\, e^{-t} - 8/3\, e^{-2t} + (t - 5/6)e^t.$$

**b)** **i)** Der Integrand $F(z) := \frac{z^3}{(z-1-3i)^2(z-1)}$ ist auf $\mathbb{C}\backslash\{1, 1+3i\}$ holomorph. Nur die Singularität 1 liegt innerhalb des Integrationsweges $|z + i| = 3$. Da 1 eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms von $F$ ist und der Zähler von $F$ in 1 nicht verschwindet, besitzt $F$ in 1 eine Polstelle erster Ordnung. Deshalb ist

$$\operatorname{res}(F;\, 1) = (z - 1)F(z)\Big|_{z=1} = \frac{z^3}{(z - 1 - 3i)^2}\Big|_{z=1} = -\frac{1}{9}$$

und nach dem Residuensatz gilt

$$\int_{|z-i|=2} F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;\, 1) = -\frac{2\pi i}{9}.$$

**ii)** Der Integrand $F(z) := z^3e^{1/z^2}$ ist auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorph und besitzt in 0 eine wesentliche Singularität. Aus der Reihenentwicklung

$$z^3e^{1/z^2} = z^3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1/z^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^{2k-3}} = z^3 + z + \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^5} + \ldots$$

lässt sich $\operatorname{res}(F;\, 0) = \frac{1}{2}$ ablesen. Da 0 innerhalb des Integrationsweges $|z - 1| = 2$ liegt, erhält man nach dem Residuensatz

$$\int_{|z-1|=2} F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;\, 0) = \pi i.$$