Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Frühjahr 2011
02.03.2011

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 $\quad$ ($6 + 4 = 10$ Punkte)

a) Im Vektorraum $C^1(\mathbb{R})$ der auf $\mathbb{R}$ einmal stetig differenzierbaren Funktionen seien die Funktionen $b_1, b_2, b_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$b_1(x) = \sin^2(x)\,, \qquad b_2(x) = \sin(x)\,\cos(x)\,, \qquad b_3(x) = \cos^2(x)\,.$$

Es sei $V := \mathrm{Lin}(b_1, b_2, b_3)$.

i) Begründen Sie, dass $B := (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von V bildet.

ii) Zeigen Sie, dass durch $L\colon V \to V$, $v \mapsto 2v' + v$ eine lineare Abbildung definiert wird, und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Basis B.

iii) Berechnen Sie unter Verwendung der Darstellungsmatrix aus Teil ii)

$$\big(L(w)\big)(x) \qquad \text{für} \quad w(x) := \big(\sin(x) + \cos(x)\big)\cos(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

b) Geben Sie eine Matrix A an, die zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ den Eigenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$ den Eigenvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ besitzt.

Aufgabe 2 $\quad$ ($5 + 5 = 10$ Punkte)

a) Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y, z) \mapsto xy + z^3$$

und

$$\vec{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u^2 - v + 2 \\ \sin(u) \\ \cos(v) \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie f' und $\vec{g}\,'$.

ii) Ermitteln Sie die Ableitung von $f \circ \vec{g}$.

iii) Berechnen Sie die Richtungsableitung $(D_{\vec{w}}\vec{g})(1, 2)$ für $\vec{w} := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie Maximum und Minimum von

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \quad (x, y, z) \mapsto 2x + y + z$$

unter den beiden Nebenbedingungen $x^2 + y^2 = 1$ und $y = z$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Sei $D \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$ die beschränkte Menge, die von den Kurven $y = 0$, $y^2 = x$ und $y = 2 - x$ berandet ist.

i) Skizzieren Sie D.

ii) Berechnen Sie den Wert von

$$\iint\limits_D xy \, d(x,y)\,.$$

b) In Abhängigkeit des reellen Parameters α sei das Vektorfeld $\vec{v}_\alpha$ definiert durch

$$\vec{v}_\alpha \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,, \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(z) \\ \alpha yz \\ x\cos(z) + y^2 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $\vec{v}_\alpha$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^3$ ist, und geben Sie für diese α jeweils ein zugehöriges Potential an.

ii) Die Kurve γ sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}\colon [0, \tfrac{3}{2}\pi] \to \mathbb{R}^3\,, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\int_\gamma \vec{v}_0 \cdot d\vec{s} \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma \vec{v}_2 \cdot d\vec{s}\,.$$

Hinweis: Eine Stammfunktion von $\cos^2(t)$ ist gegeben durch $\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cos(t)\sin(t)$.

Aufgabe 4 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Berechnen Sie mittels der Laplacetransformation die auf $[0,\infty)$ definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = te^{-t}\,, \qquad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = -2\,.$$

b) Bestimmen Sie um den Entwicklungspunkt $z_0 = 2$ die Laurententwicklung von

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)}\,,$$

die im Punkt $1 + i$ gegen $f(1+i)$ konvergiert. Geben Sie den Konvergenzbereich dieser Laurententwicklung an.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 23.03.2011, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 13.04.2011, von 14:00 bis 16:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 18.04.2011 bis 21.04.2011 im Allianz-Gebäude 05.20.