Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Frühjahr 2011
02.03.2011

Bachelor–Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) i) Um zu begründen, dass $B := (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von $V := \mathrm{Lin}(b_1, b_2, b_3)$ ist, reicht es zu zeigen, dass die Funktionen b_1, b_2, b_3 in $C^1(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind. Seien dazu $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ mit $c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 = n$. Hierbei bezeichnet $n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ die Nullfunktion, also den Nullvektor in $C^1(\mathbb{R})$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$c_1 \sin^2 x + c_2 \sin x \, \cos x + c_3 \cos^2 x = 0\,. \tag{$*$}$$

Speziell für $x = 0$ und $x = \pi/2$ ergibt sich $c_3 = 0$ bzw. $c_1 = 0$. Deshalb lautet $(*)$ dann $c_2 \sin x \, \cos x = 0$. Setzt man hierin z.B. $x = \pi/4$ ein, so folgt auch $c_2 = 0$.
Insgesamt hat man $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, so dass b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind.

ii) Da

$$\begin{aligned} b_1'(x) &= 2\sin x \, \cos x = 2b_2(x)\,, \\ b_2'(x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = b_3(x) - b_1(x)\,, \\ b_3'(x) &= -2\cos x \, \sin x = -2b_2(x) \end{aligned}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt, ergibt sich

$$\begin{aligned} Lb_1 &= 2b_1' + b_1 = 4b_2 + b_1 \in V\,, \\ Lb_2 &= 2b_2' + b_2 = 2b_3 - 2b_1 + b_2 \in V\,, \\ Lb_3 &= 2b_3' + b_3 = -4b_2 + b_3 \in V\,. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Also bildet L tatsächlich von V nach V ab. Außerdem ist L linear, denn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und alle $f, g \in V$ gilt aufgrund der Linearität der Ableitung (vgl. HM I)

$$\begin{aligned} L(\alpha f + \beta g) &= 2(\alpha f + \beta g)' + (\alpha f + \beta g) = 2\alpha f' + 2\beta g' + \alpha f + \beta g \\ &= \alpha(2f' + f) + \beta(2g' + g) = \alpha L(f) + \beta L(g)\,. \end{aligned}$$

Die Darstellungsmatrix von L bezüglich der Basis B kann man sofort den Gleichungen in $(**)$ entnehmen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

iii) Wegen $w(x) = \sin x \, \cos x + \cos^2 x = b_2(x) + b_3(x)$, $x \in \mathbb{R}$, lauten die Koordinaten von w bezüglich der Basis B

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Darstellungsmatrix aus ii) ergibt sich daher für die Koordinaten von Lw bezüglich der Basis B

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

woraus $(Lw)(x) = -2b_1(x) - 3b_2(x) + 3b_3(x) = -2\sin^2 x - 3\sin x \, \cos x + 3\cos^2 x$, $x \in \mathbb{R}$, folgt.

b) Da die gesuchte Matrix A Eigenvektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ hat, gilt $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Da die beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 verschieden sind, ist A diagonalisierbar. Deshalb erhält man für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

deren erste Spalte aus dem Eigenvektor $\vec{v}_1$ zum Eigenwert 2 und deren zweite Spalte aus dem Eigenvektor $\vec{v}_2$ zum Eigenwert -1 besteht,

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =: D\,.$$

Es folgt

$$A = SDS^{-1} = S \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) **i)** Für die Ableitungen ergibt sich

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 3z^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}\,, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

und

$$\vec{g}\,'(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -1 \\ \cos u & 0 \\ 0 & -\sin v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}\,, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2\,.$$

ii) Mit der Kettenregel folgt für die Ableitung der Funktion $h := f \circ \vec{g} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h'(u,v) = f'(\vec{g}(u,v))\, \vec{g}\,'(u,v) &= \begin{pmatrix} \sin u & u^2 - v + 2 & 3\cos^2 v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2u & -1 \\ \cos u & 0 \\ 0 & -\sin v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u \sin u + (u^2 - v + 2)\cos u & -\sin u - 3\cos^2 v\, \sin v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}\,, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2\,. \end{aligned}$$

iii) Da die Funktion $\vec{g}$ im Punkt $(1,2)$ differenzierbar ist, gilt für $\vec{w} := (3,4)$

$$D_{\vec{w}}\vec{g}(1,2) = \vec{g}\,'(1,2)\,\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \cos 1 & 0 \\ 0 & -\sin 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3\cos 1 \\ -4\sin 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,.$$

b) Nach Einsetzen der zweiten Nebenbedingung $y = z$ in die Funktion f sieht man, dass es reicht, Maximum und Minimum von

$$\widetilde{f} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad (x,y) \mapsto 2x + 2y$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ zu berechnen.

Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ definiere $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Da die Menge $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion $\widetilde{f}$ darauf ihr Maximum und ihr Minimum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert.

Zur Bestimmung der globalen Extrema von $\widetilde{f}$ auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl $\widetilde{f}$ als auch g sind auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Wegen

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

gilt $\operatorname{rang} g'(x,y) < 1$ genau für $x = y = 0$; der Punkt $(0,0)$ erfüllt jedoch die Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ nicht. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$L(x,y,\lambda) := \widetilde{f}(x,y) + \lambda g(x,y) = 2x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla L(x,y,\lambda) = \vec{0}$, also:

$$\begin{aligned} 2 + 2\lambda x &= 0 \\ 2 + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

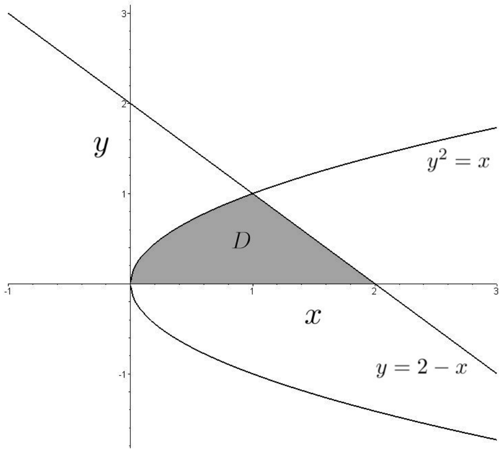
Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung führt auf $2\lambda(x-y) = 0$, was genau für $\lambda = 0$ oder $x = y$ erfüllt ist. Im Fall $\lambda = 0$ lautet die erste Gleichung $2 = 0$; diese ist stets falsch. Für $x = y$ ergibt sich nach der dritten Gleichung $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Wegen $\widetilde{f}(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ und $\widetilde{f}(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ folgt

$$\max_{(x,y)\in S} \widetilde{f}(x,y) = \widetilde{f}(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \min_{(x,y)\in S} \widetilde{f}(x,y) = \widetilde{f}(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}\,.$$

Unter Berücksichtigung dieser Rechnung erhält man als Ergebnis der ursprünglichen Aufgabe, dass f unter den beiden Nebenbedingungen $x^2 + y^2 = 1$, $y = z$ im Punkt $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$ sein Maximum $2\sqrt{2}$ und im Punkt $(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$ sein Minimum $-2\sqrt{2}$ annimmt.

Aufgabe 3

a) **i)**



ii) Es gilt $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \leqslant x \leqslant 2 - y,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ und daher

$$\begin{aligned} \iint_D xy\, d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{2-y} xy\, dx \right) dy = \int_0^1 y \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{x=y^2}^{x=2-y} dy = \int_0^1 y\left(\tfrac{1}{2}(2-y)^2 - \tfrac{1}{2}y^4\right) dy \\ &= \int_0^1 2y - 2y^2 + \tfrac{1}{2}y^3 - \tfrac{1}{2}y^5\, dy = \left[y^2 - \tfrac{2}{3}y^3 + \tfrac{1}{8}y^4 - \tfrac{1}{12}y^6\right]_{y=0}^{y=1} = \tfrac{3}{8}\,. \end{aligned}$$

b) **i)** Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\vec{v}_\alpha$ auf der einfach zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Daher ist $\vec{v}_\alpha$ genau dann ein Potentialfeld, wenn $\operatorname{rot} \vec{v}_\alpha = \vec{0}$ gilt. Wegen

$$\operatorname{rot} \vec{v}_\alpha(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y - \alpha y \\ \cos z - \cos z \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\alpha)y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt $\operatorname{rot} \vec{v}_\alpha(x,y,z) = \vec{0}$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ genau dann, wenn $\alpha = 2$ ist. Also ist $\vec{v}_\alpha$ nur im Fall $\alpha = 2$ ein Potentialfeld. $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei ein zugehöriges Potential, d.h. $\nabla f = \vec{v}_2$. Da $\partial_x f(x,y,z) = \sin z$ gelten soll, ergibt sich

$$f(x,y,z) = x \sin z + c(y,z)$$

mit einer geeigneten Funktion $c \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= 2yz$ sein. Das bedeutet $c(y,z) = y^2 z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Somit ist

$$f(x,y,z) = x \sin z + y^2 z + d(z)\,,$$

woraus $\partial_z f(x,y,z) = x \cos z + y^2 + d'(z)$ folgt. Damit ergibt sich die Forderung $d'(z) = 0$, was auf $d(z) = C$ für eine beliebige Konstante $C \in \mathbb{R}$ führt. Insgesamt hat man

$$f(x,y,z) = x \sin z + y^2 z + C\,.$$

ii) Bei $\vec{v}_0$ gilt nach Definition des Kurvenintegrals

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{v}_0 \cdot d\vec{s} &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \vec{v}_0(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ \cos^2 t + \sin^2 t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} -\sin^2 t + 1\, dt = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 t\, dt = \left[\tfrac{1}{2} t + \tfrac{1}{2} \cos t\, \sin t\right]_0^{\frac{3}{2}\pi} = \tfrac{3}{4}\pi\,.\end{aligned}$$

Bei dem Potentialfeld $\vec{v}_2$ dagegen kann man auf das in Teil i) bestimmte Potential f zurückgreifen

$$\int_\gamma \vec{v}_2 \cdot d\vec{s} = f(\vec{r}(\tfrac{3}{2}\pi)) - f(\vec{r}(0)) = f(0,-1,\tfrac{3}{2}\pi) - f(1,0,0) = \tfrac{3}{2}\pi\,.$$

HM II Physik März 2011 Lösungen

A4a) Mit $Y(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t)$ und $te^{-t} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{(s+1)^2}$ geht die DGl mit den Anfangswerten über in:

$$s^2 Y(s) + 2 - s + 2s\,Y(s) - 2 + Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow Y(s)(s^2+2s+1) = Y(s)(s+1)^2 = s + \frac{1}{(s+1)^2}$$

oder $\underline{Y(s) = \frac{s}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^4}}$

$$\frac{1}{(s+1)^2} \circ\!\!-\!\!\circ\, te^{-t} \Rightarrow \underline{\frac{s}{(s+1)^2}} \bullet\!\!-\!\!\circ\, D(e^{-t}t) = \underline{e^{-t} - te^{-t}}$$

$$\underline{\frac{1}{(s+1)^4} \bullet\!\!-\!\!\circ\, \frac{1}{3!}t^3e^{-t}}$$

$$\Rightarrow \underline{y(t) = e^{-t} - te^{-t} + \frac{1}{3!}t^3e^{-t}}$$

A4b) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{z-4} - \frac{1}{3}\frac{1}{z-1}$

Gesucht ist Entwicklung um 2. Die Polstellen 1 und 4 haben von 2 den Abstand 1 bzw. 2. Wegen $|1+i-2| = |i-1| = \sqrt{2}$ und $1 < \sqrt{2} < 2$ ist die Entwicklung von $f(z)$ für z mit $1 < |z-2| < 2$ gesucht.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+z-2} = \frac{1}{z-2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \sum_{k=-\infty}^{-1} (-1)^{k+1}(z-2)^k \quad , |z-2| > 1$$

geometrische Reihe

$$\frac{1}{z-4} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{z-2}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{2}\right)^k \quad , |z-2| < 2$$

geometrische Reihe

Ergebnis: $\underline{f(z) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^k(z-2)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-2}{2}\right)^k\right)}$

$\underline{1 < |z-2| < 2}$.