Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski

Frühjahr 2012
13.03.2012

Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 **(10 Punkte)** (1+3+3+3)

Es sei V der reelle Vektorraum der reellen $(2,2)$–Matrizen mit der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Es ist $T : V \to V$ durch $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$ gegeben.

a) Begründen Sie, dass T linear ist.

b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von T bezogen auf die Basis B.

c) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis für Bild (A) und eine Basis für Kern (A) an. Ist A invertierbar?

d) Berechnen Sie die Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 2 **(10 Punkte)** (2+4+4)

Es sind $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ x + y + y^3 \end{pmatrix}$

und $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} \arctan(x+y) \\ \sinh(x-y) \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Berechnen Sie $\vec{f}\,'(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Begründen Sie, dass $\vec{f}$ bijektiv ist.

c) Es sei $\vec{h} = \vec{f}^{-1} \circ \vec{g}$. Berechnen Sie $\vec{h}'(0,0)$.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)** (6+4)

Gegeben sind

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -yz^2 \\ +y^2 z \end{pmatrix}$$

und $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 16, z > 0\}$.

a) Berechnen Sie $I = \iint\limits_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{o}$ direkt mittels der Definition des Oberflächenintegrals.

b) Berechnen Sie I mittels des Stokesschen Integralsatzes.

Hinweis: $\displaystyle\int^x \sin^2(\lambda t)dt = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\lambda}\sin(2\lambda x)$

Aufgabe 4 **(10 Punkte)** (3+7)

a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_\gamma (z - i)dz$, wobei

$$\gamma \quad \text{durch} \quad z(t) = t + it^3,\ 0 \le t \le 1, \text{ gegeben ist.}$$

b) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Laplace Transformierte von $y(t)$ sei $Y(s) = \dfrac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2}$. Berechnen Sie $y(t)$.

Hinweis: $\displaystyle\int^x \sin^2(\lambda t)dt = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\lambda}\sin(2\lambda x)$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse hängen ab Freitag, **30.03.2012**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`http://www.math.kit.edu/iana1...`

im Internet.

Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den **18.04.2012**, von 15.45 bis 17.30 Uhr im Benz–Hörsaal (Geb. 10.21) statt.

Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **23.04.2012** bis **27.04.2012** im Allianzgebäude 05.20.