HM II Physik März 2012 Lösungen

A1 Wir verwenden die Abkürzungen $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für die Basiselemente von V.

a) T ist linear, da für $(2,2)$-Matrizen A, B, C und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: $A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$ (Matrizenmultiplikation)

b) $T(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_1 = 1A_1 + 0A_2 + 1A_3 + 0A_4$ $(1, 0 \in \mathbb{R})$

$T(A_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_2 = 0A_1 + 1A_2 + 0A_3 + 1A_4$

$T(A_3) = T(A_1)$, $T(A_4) = T(A_2)$.

Man liest ab die Darstellungsmatrix von T bzgl B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (Koeffizienten in obigen Entwicklungen)

c) Man sieht sofort (Spalten/Zeilen sind l.a.), dass $\det(A) = 0$. A ist nicht invertierbar. Hier sieht man auch schon, dass 0 ein EW ist.

Bild(A) wird durch die Spalten von A aufgespannt:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis für Bild(A).

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \ker(A) \iff A\vec{x} = \vec{0} \iff \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Basis für $\ker(A)$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

HM II Physik März 2012 Lösungen

A1 d) $0 = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 (\lambda - 2)^2$

A hat die beiden doppelten EW $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

$E(0)$: Eigenraum zu $\lambda_1 = 0$: $\vec{v} \in E(0) \Leftrightarrow \vec{v} \in \operatorname{Kern}(A)$

also Basis von $E(0)$: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$E(2)$: Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$: $\vec{v} \in E(2)$ $\left(\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \right)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{matrix} v_1 = v_3 \\ v_2 = v_4 \end{matrix}$$

also Basis von $E(2)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A2 a) $\vec{f}\,'(x,y) = [D_1\vec{f}(x,y), D_2\vec{f}(x,y)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1+3y^2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{f}$ ist injektiv auf $\mathbb{R}^2$.

Aus $\vec{f}(x_1,y_1) = \vec{f}(x_2,y_2)$ folgt $x_1 = x_2$ und hiermit

$y_1 + y_1^3 = y_2 + y_2^3 \Rightarrow y_1 = y_2$, da $v(t) = t + t^3$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton wächst.

$\vec{f}$ ist surjektiv: Es sei $\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Es ist zu begründen, dass es ein $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$ gibt.

$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \Rightarrow x = \xi$ und $y + y^3 = \zeta - \xi$

Da $v(t) = t + t^3 \to -\infty$ für $t \to -\infty$

$\to +\infty$ für $t \to \infty$ gelten und da $v(t)$

streng wächst, gibt es nach dem Zwischenwertsatz (sogar genau) ein $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $y_0 + y_0^3 = \zeta - \xi$.

Es gilt also $\vec{f}(\xi, y_0) = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}$.

c) $\vec{h}\,'(x,y) = (\vec{f}^{\,-1})'(\vec{g}(x,y))\,\vec{g}\,'(x,y)$ (Kettenregel)

$= (\vec{f}\,'(\vec{g}(x,y)))^{-1}\,\vec{g}\,'(x,y)$ (Inverse Funktion Satz)

Also $\vec{h}\,'(0,0) = (\vec{f}\,'(\vec{g}(0,0)))^{-1}\,\vec{g}\,'(0,0)$

Es ist $\vec{g}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{f}\,'(\vec{g}(0,0)))^{-1} = (\vec{f}\,'(0,0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{g}\,'(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(x+y)^2} & \frac{1}{1+(x+y)^2} \\ \cosh(x-y) & -\cosh(x-y) \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{h}\,'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

HM II E-Technik / Physik März 2012 Lösungen

A3 a) Parametrisiere S mittels Kugelkoordinaten:

$$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} 4\cos\varphi\cos\vartheta \\ 4\sin\varphi\cos\vartheta \\ 4\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 < \vartheta \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \varphi \le 2\pi$$

$$d\vec{o} = (\partial_1\vec{r} \times \partial_2\vec{r})(\varphi,\vartheta)\, d(\varphi,\vartheta) = 16 \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta\cos\varphi \\ \cos^2\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} d(\varphi,\vartheta)$$

$$\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4yz \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = 16 \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(4\cdot 16 \sin\varphi \sin^2\vartheta \cos^3\vartheta \cos\varphi + \sin\vartheta\cos\vartheta\right) d\varphi\, d\vartheta$$

$$= 0 + 8\cdot 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\vartheta)\, d\vartheta = \underline{16\pi}$$

b) $$\underline{I} = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} \quad \text{mit} \quad C: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4\cos t \\ 4\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (8\cos t - 4\sin t)(-4\sin t)\, dt$$

$$= \underbrace{-32\int_0^{2\pi} \cos t \sin t\, dt}_{=0} + 16\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt \underset{\text{Hinweis}}{=} 16\cdot\frac{1}{2}2\pi = \underline{16\pi}$$

A4 a) γ verbindet 0 mit $1+i$. Da f, $f(z) = z - i$, in $\mathbb{C}$ holomorph ist, ist $\int_\gamma f(z)\,dz$ wegunabhängig: Ist $\tilde{\gamma}$: $z(t) = t(1+i)$, $0 \le t \le 1$, so gilt:

$$\underline{\int_\gamma (z-i)\,dz} = \int_{\tilde\gamma} (z-i)\,dz = \int_0^1 (t(1+i)-i)(1+i)\,dt$$

$$= 2i \left.\tfrac{1}{2}t^2\right|_0^1 - i + 1 = \underline{1}$$

b) $\underline{Y(s) = \frac{\alpha}{(s^2+\alpha^2)^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t) = ?}$

$\underline{\alpha = 0}$: $y(t) = 0$.

$\underline{\alpha \neq 0}$ $\underline{1.\text{ Möglichkeit}}$ zur Berechnung von $y(t)$:

Setze $G(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$. Es ist ($\mathrm{Re}(s) > 0$):

$G'(s) = -2s\,Y(s)$, $\underline{Y(s) = -\frac{1}{2s} G'(s)}$. Mit Regeln zum Rechnen mit der Laplace Transformation erhält man:

$$G(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \sin \alpha t$$

$$-G'(s) \bullet\!\!-\!\!\circ t \sin(\alpha t)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{s}G'(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \int_0^t \tau \sin(\alpha\tau)\,d\tau \overset{\text{partiell integrieren}}{=} -\frac{t}{\alpha}\cos(\alpha t) + \frac{1}{\alpha^2}\sin(\alpha t)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(t) = -\frac{t}{2\alpha}\cos(\alpha t) + \frac{1}{2\alpha^2}\sin(\alpha t)}$$

HMII Physik März 2012 Lösungen

noch zu A4) b) 2. Möglichkeit

$$G(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \circ\!-\!\!\bullet \sin\alpha t = g(t)$$

$$Y(s) = \frac{1}{\alpha} G(s) \cdot G(s) \circ\!-\!\!\bullet \underline{y(t) = \frac{1}{\alpha}(g*g)(t)}$$

$$\underline{\frac{1}{\alpha}(g*g)(t)} = \frac{1}{\alpha}\int_0^t \sin\alpha(t-\tau)\sin\alpha\tau\, d\tau$$

Additionstheorem

$$\overset{\downarrow}{=} \sin(\alpha t)\frac{1}{\alpha}\int_0^t \cos(\alpha\tau)\sin(\alpha\tau)\,d\tau - \frac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)\int_0^t \sin^2(\alpha\tau)\,d\tau$$

$$= \underline{-\frac{1}{2\alpha} t\cos(\alpha t) + \frac{1}{2\alpha^2}\sin(\alpha t)}$$

mit $\cos(\alpha\tau)\sin(\alpha\tau) = \frac{1}{2\alpha}\frac{d}{d\tau}\left(\sin^2(\alpha\tau)\right)$

mit dem Hinweis und mit $\sin(2\alpha t) = 2\sin(\alpha t)\cos(\alpha t)$.