Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2012
17.09.2012

Bachelor-Modulprüfung

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 $\quad$ (5 + 2 + 3 = 10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A sowie die dazugehörigen Eigenräume.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix P sowie deren Inverse P^{-1} so an, dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

c) Berechnen Sie A^k für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 $\quad$ (6 + 4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1.$$

und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Minimal- oder Maximalstellen handelt.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Funktion. Die Komponentenfunktionen von f werden mit $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bezeichnet, so dass

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

ist. Weiter sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es gelte

$$f_1 = \phi \circ f_2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie:

$$\det f'(x, y) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 3 $\quad$ (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 2xg(y) + y \\ 2(x^2 + 1)g(y) + x \end{pmatrix},$$

wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

Bestimmen Sie g so, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ ist und $g(0) = 1$ gilt. Ermitteln Sie für dieses g ein Potential von $\vec{v}$.

– bitte wenden –

b) Die Oberfläche von

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, \ y \geqslant 0, \ 0 \leqslant z \leqslant x^2\}$$

werde mit $\mathcal{F}$ bezeichnet und das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy + z + 1 \\ x^2 + y \\ x - y \end{pmatrix}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie den Fluss von $\vec{w}$ durch die Oberfläche $\mathcal{F}$ nach außen, d.h. das Integral

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \vec{N} \, do,$$

wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor auf $\mathcal{F}$ ist, der ins Äußere von V zeigt.

Aufgabe 4 $\quad$ $((3+3)+4 = 10$ Punkte$)$

a) Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\text{(i)} \oint_{|z+1|=2} \frac{\sin\left(\frac{1}{z-2}\right)}{z^2} \, dz, \qquad \text{(ii)} \oint_{|z|=4} \frac{z e^{\frac{1}{3-z}}}{z-3} \, dz,$$

wobei die Kreislinien positiv orientiert durchlaufen werden.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+9x^2}$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Fouriertransformierte der Funktion $h(x) = e^{-|x|}$ gegeben ist durch $\mathscr{F}h(\xi) = \frac{2}{1+\xi^2}$.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Dienstag, den 09.10.2012, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Donnerstag, den 18.10.2012, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Tulla-Hörsaal (Geb. 11.40) statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 22.10.2012 bis 26.10.2012 im Allianz-Gebäude 05.20.