Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
08.03.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (2+4+1+3=10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -7 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A inklusive ihrer algebraischen Vielfachheiten.

b) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A den dazugehörigen Eigenraum an.

c) Bestimmen Sie, falls möglich, eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist und geben Sie diese Diagonalmatrix an.

d) Berechnen Sie A^{2016}.

Aufgabe 2 ((5+2)+3=10 Punkte)

a) Sei $f : [0,\pi]^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y).$$

(i) Bestimmen Sie die beiden kritischen Punkte von f in $(0,\pi)^2$.
Hinweis: $\tan(u) = -\tan(v),\ u \in (0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}, v \in (0,2\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\} \quad \Leftrightarrow \quad v \in \{\pi - u, 2\pi - u\}.$

(ii) Zeigen Sie ohne die Hesse-Matrix, dass es sich dabei um globale Extrema auf $[0,\pi]^2$ handelt.
Hinweis: Die Beantwortung der Frage ist auch möglich, ohne (i) gelöst zu haben.

b) Für welche $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ definiert $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y + \alpha z \\ \beta x - 3y - z \\ 4x + \gamma y + 2z \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld? Geben Sie für diesen Fall ein Potential G an.

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

a) Ermitteln Sie, falls existent, die Extrema von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = x + 3y - 2z$$

auf $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 14\}$.

b) Berechnen Sie das Volumen von

$$A := \{(x,y,u,v) \mid x^2 + y^2 \leqslant u^2 + v^2 \leqslant 1\}$$

mit Hilfe einer passenden Substitution.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (0 wird hier als 2×2-Matrix interpretiert) $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$ gilt.

Aufgabe 4 ((3+4)+3=10 Punkte)

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - y + z \\ y - z + x \\ z - x + y \end{pmatrix},$$

und γ der Weg, der ein Mal den Rand des Dreiecks mit den Ecken $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ durchläuft (in dieser Reihenfolge).
Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x$$

(i) Direkt,

(ii) Mit dem Satz von Stokes.
Hinweis: Eine Parametrisierung des Dreiecks ist gegeben durch

$$g(x,y) = (x, y, 1 - x - y), \qquad (x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}.$$

b) Sei $\gamma(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2(z+2)} \, \mathrm{d}z.$$

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Donnerstag, den **14.04.2016**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) und unter `www.math.kit.edu/iana1` veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **27.04.2016**, von **16 bis 18 Uhr** im **Tulla-Hörsaal (Geb. 11.40)** statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **02.05.2016** bis **06.05.2016** statt.