Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Dipl.-Math. Sebastian Schwarz

WS 2015/2016
08.03.2016

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (2+4+1+3=10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -7 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A inklusive ihrer algebraischen Vielfachheiten.

b) Geben Sie zu jedem Eigenwert von A den dazugehörigen Eigenraum an.

c) Bestimmen Sie, falls möglich, eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist und geben Sie diese Diagonalmatrix an.

d) Berechnen Sie A^{2016}.

Lösungsvorschlag

a) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 2 \\ -1 & -1-\lambda & -1 \\ -7 & -5 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (4-\lambda)(-1-\lambda)(-3-\lambda) + 3\cdot(-1)\cdot(-7) + (-1)\cdot(-5)\cdot 2 \\ &\quad - (-7)\cdot 2\cdot(-1-\lambda) - (-1)\cdot 3\cdot(-3-\lambda) - (-5)\cdot(-1)\cdot(4-\lambda) \\ &= (-\lambda^3 + 13\lambda + 12) + 21 + 10 - (14 + 14\lambda) - (9 + 3\lambda) - (20 - 5\lambda) \\ &= -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-1). \end{aligned}$$

Somit sind die Eigenwerte $-1, 0$ und 1, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1.

b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
E_A(-1) = \operatorname{Kern}(A+I) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -7 & -5 & -2 \end{pmatrix} \;\cdot 5 \;\; \cdot(-7) \;\; | \cdot (-1) \\
&= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \;\cdot \tfrac{5}{3} \;\; | \cdot \tfrac{1}{3} \;\; = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
E_A(0) = \operatorname{Kern}(A) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -7 & -5 & -3 \end{pmatrix} \;\cdot 4 \;\; \cdot(-7) \;\; | \cdot (-1) \\
&= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \;\cdot 2 \;\; \cdot(-1) \;\; | \cdot (-1) \;\; = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
E_A(1) = \operatorname{Kern}(A-I) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -7 & -5 & -4 \end{pmatrix} \;\cdot 3 \;\; \cdot(-7) \;\; | \cdot (-1) \\
&= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix} \;\cdot 3 \;\; | \cdot -\tfrac{1}{3} \;\; = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\cdot(-2) \\
&= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}\} = \operatorname{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\}.
\end{aligned}
$$

c) Nach Vorlesung gilt mit

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: D$$

d) Es gilt nach **c)** $A = SDS^{-1}$ und somit

$$A^{2016} = (SDS^{-1})^{2016} = (SDS^{-1})(SDS^{-1})\dots(SDS^{-1})(SDS^{-1}) = SD^{2016}S^{-1} = S\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$$

Wir berechnen S^{-1} über

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mid \cdot (-1) \\ \mid \cdot (-1) \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

und somit

$$A^{2016} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alternativ sehen wir, dass

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -7 & -5 & -3 \end{pmatrix} = A,$$

Also gilt auch $A^5 = A^3 \cdot A^2 = A \cdot A^2 = A^3 = A$ und somit induktiv $A^{2n+1} = A$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit erhalten wir $A^{2015} = A$ und durch Multiplikation mit A schließlich

$$A^{2016} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 ((5+2)+3=10 Punkte)

a) Sei $f : [0,\pi]^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y).$$

(i) Bestimmen Sie die beiden kritischen Punkte von f in $(0,\pi)^2$.
Hinweis: $\tan(u) = -\tan(v),\ u \in (0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}, v \in (0,2\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} \quad \Leftrightarrow \quad v \in \{\pi - u, 2\pi - u\}$.

(ii) Zeigen Sie ohne die Hesse-Matrix, dass es sich dabei um globale Extrema auf $[0,\pi]^2$ handelt.
Hinweis: Die Beantwortung der Frage ist auch möglich, ohne (i) gelöst zu haben.

b) Für welche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ definiert $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y + \alpha z \\ \beta x - 3y - z \\ 4x + \gamma y + 2z \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld? Geben Sie für diesen Fall ein Potential G an.

Lösungsvorschlag

a) (i) f ist stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ mit

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(y)[\cos(x)\sin(x+y) + \sin(x)\cos(x+y)] \\ \sin(x)[\cos(y)\sin(x+y) + \sin(y)\cos(x+y)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\sin\neq 0 \text{ auf } (0,\pi)}{\Leftrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(x)\sin(x+y) + \sin(x)\cos(x+y) \\ \cos(y)\sin(x+y) + \sin(y)\cos(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{(1)}$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ steht oben $\cos(\frac{\pi}{2} + y) = 0$, was wegen $y \in (0,\pi)$ nicht möglich ist.

Für $y = \frac{\pi}{2}$ steht unten $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = 0$, was wegen $x \in (0,\pi)$ nicht möglich ist.

Für $x + y \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \cos(x)\sin(x+y) \\ \cos(y)\sin(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also wegen $\sin(x+y) \in \{\pm 1\}$ gerade $\cos(x) = \cos(y) = 0$, also $x = y = \frac{\pi}{2}$, somit $x + y = \pi$, ein Widerspruch.

Außerhalb dieser Stellen ist nun das Teilen durch $\cos(x), \cos(y)$ und $\cos(x+y)$ erlaubt und es ergibt sich

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(x+y) \\ \cos(y)\sin(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(x+y) \\ -\sin(y)\cos(x+y) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \tan(x+y) \\ \tan(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tan(x) \\ -\tan(y) \end{pmatrix}}_{(2)},$$

also insbesondere $\tan(x) = \tan(y)$, womit $x = y$ folgt, da der Tangens auf $(0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ bijektiv ist. Schließlich bedeutet dies

$$(2) \Leftrightarrow x = y \text{ und } \tan(2x) = -\tan(x).$$

Aus dem Hinweis folgt nun für x (ersetze u durch x und v durch $2x$) $2x \in \{\pi - x, 2\pi - x\}$, also $x \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$. Die kritischen Punkte sind demnach $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ und $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$.

(ii) Da f stetig ist auf der beschränkten und abgeschlossenen, also kompakten Menge $[0,\pi]^2$ (karthesisches Produkt zweier beschränkter und abgeschlossener Intervalle), nimmt sie laut Vorlesung ihr Maximum und Minimum auf dieser Menge an. Weil auf dem Rand dieser Menge immer entweder $x \in \{0,\pi\}$ oder $y \in \{0,\pi\}$ gilt, ist f dort 0. Da f nicht konstant 0 ist und sowohl positive als auch negative Werte annimmt (wie wir gleich sehen werden), müssen die Extrema demnach im Inneren und damit an den beiden kritischen

Punkten angenommen werden. Es gilt

$$f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad f(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3})\sin(\frac{2\pi}{3})\sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Also nimmt f in $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ sein Maximum $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ und in $(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ sein Minimum $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ an. Abgesehen davon, dass man die genauen Punkte und Werte nicht angeben kann, funktioniert obige Argumentation auch ohne Wissen über die Lage der kritischen Punkte. Wir haben zwei kritische Punkte, die Extrema werden angenommen und auf dem Rand hat die Funktion den Wert 0. Da f sowohl positive ($x, y > 0$ klein wählen) als auch negative (x, y wählen, sodass $x + y > \pi$) Werte annimmt, müssen die beiden kritischen Punkte als Maximum und Minimum sein.

b) Wir prüfen das Integrabilitätskriterium.

$$\begin{aligned} 2 = \frac{\partial g_1}{\partial y} &\overset{!}{=} \frac{\partial g_2}{\partial x} = \beta, \\ -1 = \frac{\partial g_2}{\partial z} &\overset{!}{=} \frac{\partial g_3}{\partial y} = \gamma, \\ 4 = \frac{\partial g_3}{\partial x} &\overset{!}{=} \frac{\partial g_1}{\partial z} = \alpha. \end{aligned}$$

Somit ist g genau dann ein Potentialfeld, wenn $\alpha = 4$, $\beta = 2$ und $\gamma = -1$ gilt. Das Potential G berechnen wir formal durch Integration.

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &= \int g_1 \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + c(y,z) \\ &\Rightarrow 2x + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = \frac{\partial G}{\partial y}(x,y,z) \overset{!}{=} g_2(x,y,z) = 2x - 3y - z \\ &\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = -3y - z \Rightarrow c(y,z) = -\frac{3}{2}y^2 - yz + \tilde{c}(z) \\ &\Rightarrow G(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz - \frac{3}{2}y^2 - yz + \tilde{c}(z) \\ &\Rightarrow 4x - y + \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z}(z) = \frac{\partial G}{\partial z}(x,y,z) \overset{!}{=} g_3(x,y,z) = 4x - y + 2z \\ &\Rightarrow \tilde{c}(z) = z^2. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also, dass $G(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}y^2 + z^2 + 2xy + 4xz - yz$ ein Potential von g ist.

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

a) Ermitteln Sie, falls existent, die Extrema von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = x + 3y - 2z$$

auf $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 14\}$.

b) Berechnen Sie das Volumen von

$$A := \{(x, y, u, v) \mid x^2 + y^2 \leqslant u^2 + v^2 \leqslant 1\}$$

mit Hilfe einer passenden Substitution.
Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ (0 wird hier als 2×2-Matrix interpretiert) $\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$ gilt.

Lösungsvorschlag

a) Wir wollen die Extrema von f unter der Nebenbedingung $h = 0$ mit $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$ bestimmen. f ist stetig, $S = h^{-1}(\{0\})$ abgeschlossen (da h stetig und $\{0\}$ abgeschlossen) und beschränkt (da $x, y, z \in [-\sqrt{14}, \sqrt{14}]$ in S), also kompakt. Nach Vorlesung nimmt f auf S seine Extrema an.

f und h sind auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und h bildet in eine niedrigere Dimension ab ($h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$). Es gilt

$$h'(x, y, z) = (2x, 2y, 2z),$$

womit h' nur in $(0, 0, 0)$ nicht Rang 1 hat, was jedoch kein Element von S ist. Nach dem Satz von Lagrange ergeben sich für Extrema die Gleichungen ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0, 1 + \lambda \cdot 2x = 0, 3 + \lambda \cdot 2y = 0, -2 + \lambda \cdot 2z = 0. \tag{1}$$

Nach (4),(5) und (6) ist $\lambda = 0$ nicht möglich und ebendiese Gleichungen liefern $x = -\frac{1}{2\lambda}$, $y = -\frac{3}{2\lambda}$ und $z = \frac{1}{\lambda}$. Einsetzen davon in (3) ergibt

$$0 = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 1\right) - 14 = \frac{14}{4\lambda^2} - 14,$$

also $\lambda \in \{\pm\frac{1}{2}\}$. Mögliche Kandidaten für Extrema sind demnach

$$(-1, -3, 2) \qquad \text{und} \qquad (1, 3, -2).$$

Es folgt wegen $f(-1, -3, 2) = -14 = -f(1, 3, -2)$, dass f in $(-1, -3, 2)$ sein Minimum -14 und in $(1, 3, -2)$ sein Maximum 14 auf S annimmt.

b) Sei $g : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$g(r, \varphi, s, \psi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ s\cos(\psi) \\ s\sin(\psi) \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$g'(r, \varphi, s, \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\psi) & -s\sin(\psi) \\ 0 & 0 & \sin(\psi) & s\cos(\psi) \end{pmatrix}$$

und g ist injektiv auf $(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\infty)\times(0,2\pi)$. Mit dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned}\det(g'(r,\varphi,s,\psi)) &= \det\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix}\cos(\psi) & -s\sin(\psi)\\ \sin(\psi) & s\cos(\psi)\end{pmatrix}\\ &= r(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi))\cdot s(\cos^2(\psi)+\sin^2(\psi)) = rs.\end{aligned}$$

Es gilt also mit $B=\{(r,\varphi,s,\psi)\in[0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\infty)\times[0,2\pi]\mid r\leqslant s\leqslant 1\}$, wegen $g(B)=A$,

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(A) &= \int_A 1\,\mathrm{d}(x,y,u,v) = \int_B rs\,\mathrm{d}(r,\varphi,s,\psi) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^s rs\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi\\ &= 4\pi^2\int_0^1[\frac{r^2s}{2}]_{r=0}^s\,\mathrm{d}s = 2\pi^2\int_0^1 s^3\,\mathrm{d}s = 2\pi^2[\frac{s^4}{4}]_{s=0}^1 = \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

Fubini dürfen wir dabei anwenden, da der Integrand stetig ist und B ein Normalbereich ist.

Aufgabe 4 ((3+4)+3=10 Punkte)

a) Sei $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z)=\begin{pmatrix}x-y+z\\ y-z+x\\ z-x+y\end{pmatrix},$$

und γ der Weg, der ein Mal den Rand des Dreiecks mit den Ecken $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ durchläuft (in dieser Reihenfolge).
Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma f\cdot\,\mathrm{d}x$$

(i) Direkt,

(ii) Mit dem Satz von Stokes.
Hinweis: Eine Parametrisierung des Dreiecks ist gegeben durch

$$g(x,y)=(x,y,1-x-y),\qquad (x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x,y\geqslant 0, x+y\leqslant 1\}.$$

b) Sei $\gamma(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ für $t\in[0,2\pi]$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2(z+2)}\,\mathrm{d}z.$$

Lösungsvorschlag

a) (i) Der Rand des Dreiecks wird parametrisiert durch die Wege

$$\gamma_1(t)=(1-t,t,0),\quad t\in[0,1],$$

$$\gamma_2(t)=(0,1-t,t),\quad t\in[0,1],$$

$$\gamma_3(t)=(t,0,1-t),\quad t\in[0,1],$$

die hintereinander durchlaufen werden. Es folgt nach Definition, dass

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x &= \int_{\gamma_1} f \cdot \mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} f \cdot \mathrm{d}x + \int_{\gamma_3} f \cdot \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-2t \\ 1 \\ 2t-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 1-2t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-1 \\ 1-2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (2t-1+1) + (2t-1+1) + (1+2t-1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 6t\,\mathrm{d}t = [3t^2]_0^1 = 3.
\end{aligned}$$

(ii) Die Parametrisierung aus dem Hinweis ist eine 'explizite Darstellung' mit $F(x,y) = 1-x-y$). Das gegebene Dreieck $\mathcal{F}$ ist gerade $g(A)$ mit

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}.$$

Die Kurve, die in g eingesetzt den Rand des Dreicks beschreibt, verläuft um den Rand von A im Gegenuhrzeiger Sinn, sodass A (vgl. Vorlesung) 'links von der Kurve' liegt. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} f \cdot \mathrm{d}\sigma.$$

Es gilt $\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\partial_x g \times \partial_y g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} f \cdot \mathrm{d}\sigma \overset{\text{Def.}}{=} \int_A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}(x,y) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_0^1 \int_0^{1-x} 6\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 6(1-x)\,\mathrm{d}x \\
&= [-3(1-x)^2]_0^1 = 3.
\end{aligned}$$

b) Die Funktion $f(z) = \frac{\cos(z)}{z+2}$ ist holomorph auf der Menge $B_{\frac{3}{2}}(0)$, in der der Weg γ verläuft. Der Integrand ist stetig auf der Spur von γ, da 0 im Inneren von γ liegt. Nach der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen folgt

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi \mathrm{i}}{1!} \cdot f'(0) = -\frac{\pi}{2} \cdot \mathrm{i},$$

wegen

$$f'(z) = \frac{(z+2)(-\sin(z)) - 1 \cdot \cos(z)}{(z+2)^2} = -\frac{(z+2)\sin(z) + \cos(z)}{(z+2)^2}.$$