Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

WS 2016/2017
10.03.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (3+4+1+2=10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und deren zugehörigen algebraischen Vielfachheiten. Was können Sie über die geometrischen Vielfachheiten aussagen, ohne die Eigenräume konkret zu bestimmen?

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S, bezüglich welcher $S^{-1}AS$ diagonal ist, und geben Sie $S^{-1}AS$ an.

c) Bestimmen Sie $(I_3 - A)^3$.

d) Gibt es eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass $W^2 = A$ gilt?

Aufgabe 2 ((2+3)+5=10 Punkte)

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(x^2+y^2) & ,(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit.

(ii) Bestimmen Sie alle Stellen, in denen f partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

b) Sei $g(x,y) := x^4 - 4x^2y + 4x^2y^2 + 4y^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen bzw. globalen Extremstellen von g.
Hinweis: Es ist möglich, zunächst die globalen Extrema von g zu bestimmen.

Aufgabe 3 (4+3+3=10 Punkte)

a) Definiere $f(x,y) := \sin(x^2+y^3)$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie das Maximum von f auf dem Kreis $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$.

b) Seien $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, (x,y,z)\mapsto (x,y,-2z)^T$ sowie der Zylinder $S := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, -1\le z\le 1\}$ gegeben. Bestimmen Sie $\int_S f(x)\cdot \mathrm{d}o$.
Hinweis: Bestimmen Sie $a,b,c\in\mathbb{R}$ derart, dass für $v:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, (x,y,z)\mapsto (ayz, bxz, cxy)$

$$f(x,y,z) = \nabla\times v(x,y,z)$$

für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ gilt.

c) Seien $b>a>0$. Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$.
Hinweis: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $[\varepsilon,1]\to\mathbb{R}, y\mapsto x^y$ mit $\varepsilon>0$.

Aufgabe 4 (2+4+4=10 Punkte)

a) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \cos^3(x)$.

b) Sei $f\in H(\mathbb{C})$ nicht-konstant. Zeigen Sie, dass es zu jedem $a\in\mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ derart gibt, dass $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a$ gilt.

c) Sei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } |x|\le 2 \\ 0 & \text{, falls } |x|>2 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie $\mathcal{F}f$ sowie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Donnerstag, den **27.04.2017**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) und unter `www.math.kit.edu/iana1` veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **04.05.2017**, von **16 bis 18 Uhr** in der **Neuen Chemie (Geb. 30.46)** statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **08.05.2017** bis **12.05.2017** statt.