Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger
Michael Hott, M. Sc. M. Sc.

SS 2016
10.03.2017

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur

Aufgabe 1 (3+4+1+2=10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und deren zugehörigen algebraischen Vielfachheiten. Was können Sie über die geometrischen Vielfachheiten aussagen, ohne die Eigenräume konkret zu bestimmen?

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix S, bezüglich welcher $S^{-1}AS$ diagonal ist, und geben Sie $S^{-1}AS$ an.

c) Bestimmen Sie $(I_3 - A)^3$.

d) Gibt es eine Matrix $W \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ derart, dass $W^2 = A$ gilt?

Lösungsvorschlag

a) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$c_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 8],$$

wie man durch Entwickeln nach der ersten Zeile erhält. Damit lauten die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2/3} = 1 \pm 2\sqrt{2}$, deren algebraischen Vielfachheiten Eins sind wegen der Dimension 3 des Vektorraums $\mathbb{R}^3$, auf dem A wirkt. Da die drei Eigenwerte unterschiedlich sind und die geometrischen Vielfachheiten stets mindestens Eins sind und die Summe der geometrischen Vielfachheiten höchstens die Dimension des Vektorraums sein kann, sind die geometrischen Vielfachheiten bereits Eins.

b) Wir bestimmen zunächst die Eigenräume:

$$E_A(1) = \mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right),$$

$$E_A(1 \pm 2\sqrt{2}) = \mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} \mp 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 2 & \mp 2\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 2 & \mp 2\sqrt{2} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{lin}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right).$$

Definiert man nun

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

so ist S nach Konstruktion und wegen der Eigenschaft, dass Eigenräume von symmetrischen Matrizen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander stehen, orthogonal. Außerdem gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1-2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\sqrt{2} \end{pmatrix} =: D.$$

c) Zunächst gilt

$$S^{-1}(I_3 - A)^3 S = (I_3 - D)^3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1-\lambda_3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} (1-\lambda_2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda_1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\lambda_3)^3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A, d.h. insbesondere, sie genügen

$$(1-\lambda_i)^3 = 8(1-\lambda_i).$$

Damit erhalten wir also

$$S^{-1}(I_3 - A)^3 S = 8(I_3 - D).$$

Daraus folgt

$$(I_3 - A)^3 = 8(I_3 - A) = \begin{pmatrix} 0 & -16 & 0 \\ -16 & 0 & -16 \\ 0 & -16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die erste Gleichheit in dieser Gleichung folgt aus dem **Satz von Caley-Hamilton**, der besagt, dass eine Matrix Nullstelle des (matrixwertigen) charakteristischen Polynoms ist.
Angenommen, es gäbe eine Matrix $W \in \mathbb{R}^3$ derart, dass $W^2 = A$ gälte. Dann gälte insbesondere $(S^{-1}WS)^2 = D$. Definiert man $B := S^{-1}WS \in \mathbb{R}$, so gälte wegen der Multiplikativität der Determinante

$$\det(B)^2 = \det(D) = (1-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2}) = 1 - 8 < 0,$$

ein Widerspruch dazu, dass $\det(B) \in \mathbb{R}$ gälte.

Aufgabe 2 ((2+3)+5=10 Punkte)

a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin(x^2+y^2) & ,(x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit.

(ii) Bestimmen Sie alle Stellen, in denen f partiell differenzierbar ist, und berechnen Sie dort die partiellen Ableitungen.

b) Sei $g(x,y) := x^4 - 4x^2y + 4x^2y^2 + 4y^2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen bzw. globalen Extremstellen von g.
Hinweis: Es ist möglich, zunächst die globalen Extrema von g zu bestimmen.

Lösungsvorschlag

a) (i) Außerhalb von $(0,0)$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Sei $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da sonst $(0,0)$ höchstens ein Häufungswert von $(x_n, y_n)_n$ und damit $0 = f(0,0)$ ein Häufungswert von $(f(x_n, y_n))_n$ ist. Definiert man $z_n := x_n^2 + y_n^2$, so gilt

$$f(x_n, y_n) = \frac{\sin(z_n)}{\sqrt{z_n}} = \sqrt{z_n}\frac{\sin(z_n)}{z_n} \to 0 = f(0,0),$$

wenn $n \to \infty$, wegen $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$. Da $(x_n, y_n)_n$ beliebig war, folgt die Stetigkeit von f in $(0,0)$.

(ii) Außerhalb von $(0,0)$ ist f als Komposition (partiell) differenzierbarer Funktionen (partiell) differenzierbar. Es gelten für alle $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= x\left(2\frac{\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= y\left(2\frac{\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right).
\end{aligned}$$

Seien nun $t_n := \frac{1}{n}$ und $\tau_n := -\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich sind $(t_n)_n$ und $(\tau_n)_n$ Nullfolgen. Außerdem erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}(f(t_n,0) - f(0,0)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = 1,\\
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\tau_n}(f(\tau_n,0) - f(0,0)) &= -\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = -1.
\end{aligned}$$

Insbesondere existiert $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0))$, also $\frac{\partial f}{\partial x}$ nicht. Wegen $f(t,0) = f(0,t)$ existiert ebenso $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht.

b) Zunächst einmal stellen wir fest, dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = x^4 - 4x^2y + 4x^2y^2 + 4y^2 = (x^2 - 2y)^2 + 4x^2y^2 \geq 0$$

gilt, wobei Gleichheit genau im Falle $(x,y) = (0,0)$ angenommen wird. Damit ist $(0,0)$ Stelle des einzigen globalen Minimums. Als Nächstes bestimmen wir die stationären Punkte von g. Dazu lösen wir $\operatorname{grad} g(x,y) = (0,0)$. Es gilt

$$\left|\begin{aligned} 0 &= \tfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) &&= 4x^3 - 8xy + 8xy^2 \\ 0 &= \tfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) &&= -4x^2 + 8x^2y + 8y \end{aligned}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{aligned} x(x^2 - 2y + 2y^2) &= 0 \\ x^2 - 2x^2y - 2y &= 0 \end{aligned}\right|.$$

Zunächst einmal stellen wir fest, dass $x = 0$ genau dann gilt, wenn $y = 0$ gilt, falls (x,y) diesem Gleichungssystem genügt. Wie wir bereits gesehen haben, ist $(0,0)$ sogar Stelle eines globalen Minimums. Sei also im Weiteren $(x,y) \neq (0,0)$. In diesem Fall ist das letzte Gleichungssystem äquivalent zu

$$\left|\begin{aligned} x^2 - 2y + 3y^2 &= 0 \\ x^2 - 2x^2y - 2y &= 0 \end{aligned}\right| \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{aligned} x^2 - 2y + 3y^2 &= 0 \\ 2y(x^2 + y) &= 0 \end{aligned}\right| \overset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} \left|\begin{aligned} 3x^2 + 2x^4 &= 0 \\ x^2 + y &= 0 \end{aligned}\right|.$$

Das letzte Gleichungssystem besitzt offensichtlich keine weitere Lösung als die bereits genannte triviale Lösung $(0,0)$. Damit gibt es keine weiteren lokalen Extrema.

Aufgabe 3 (4+3+3=10 Punkte)

a) Definiere $f(x,y) := \sin(x^2+y^3)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie das Maximum von f auf dem Kreis $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

b) Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (x,y,-2z)^T$ sowie der Zylinder $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1\}$ gegeben. Bestimmen Sie $\int_S f(x) \cdot \, \mathrm{d}o$.
Hinweis: Bestimmen Sie $a,b,c \in \mathbb{R}$ derart, dass für $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (ayz, bxz, cxy)$

$$f(x,y,z) = \nabla \times v(x,y,z)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ gilt.

c) Seien $b > a > 0$. Berechnen Sie $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} \, \mathrm{d}x$.
Hinweis: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $[\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}, y \mapsto x^y$ mit $\varepsilon > 0$.

Lösungsvorschlag

a) Wir bestimmen zunächst die (lokalen) Extrema von f im Inneren $U_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ des angegebenen Kreises. Es gelte für $(x,y) \in U_1(0,0)$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos(x^2+y^3) \\ 3y^2\cos(x^2+y^3) \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$-\frac{\pi}{2} < -1 < x^2+y^3 = x^2+y^2+y^2(y-1) \leq x^2+y^2 < 1 < \frac{\pi}{2}.$$

Da der Kosinus auf $(-1,1)$ keine Nullstelle besitzt, ist obige Gleichung genau für $(0,0)$ erfüllt. Wegen

$$f(0,0) = 0 < \frac{\sqrt{2}}{2} = f(0, \sqrt[3]{\pi/4})$$

ist $f(0,0) = 0$ kein Maximum von f. Daher besitzt f kein lokales Extremum auf $U_1(0,0)$. Auf dem Rand, d.h., für $x^2+y^2 = 1$ gilt

$$f(x,y) = \sin(x^2+y^3) \overset{s.o.}{=} \sin(1+y^2(y-1))$$

Da der Sinus streng wachsend auf $(-1,1)$ ist, genügt es, das Maximum von $g : [-1,1] \to \mathbb{R}, y \mapsto y^2(y-1)$ zu bestimmen. Offensichtlich gilt $g(y) \leq 0$ mit Gleichheit genau in $y = 0$ und $y = 1$. Insgesamt lautet also das Maximum von f

$$\max\{f(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\} = \sin(1).$$

b) Wir folgen dem Hinweis und berechnen zunächst für v wie im Hinweis

$$\nabla \times v(x,y,z) = \begin{pmatrix} (c-b)x \\ (a-c)y \\ (b-a)z \end{pmatrix} \overset{(!)}{=} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} = f(x,y,z).$$

Offensichtlich wird dies für $(a,b,c) = (1,-1,0)$ erfüllt. Mit dem Satz von Stokes folgt nun

$$\int_S f(x) \cdot \, \mathrm{d}o = \int_S \nabla v(x) \cdot \, \mathrm{d}o = -\int_{\gamma_1} v(x) \cdot \, \mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} v(x) \cdot \, \mathrm{d}x$$

mit $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \sin t, 1)$ und $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos t, \sin t, -1)$. Dabei werden die Ränder des Zylinders so umlaufen, dass der Zylinder links der Kurve liegt. Mit $v(x,y,z) = (yz, -xz, 0)$ und der letzten Gleichung folgt

$$\int_S f(x) \cdot \, \mathrm{d}o = -\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = 4\pi.$$

c) Zunächst gilt für alle $x > 0$

$$\frac{x^b - x^a}{\ln(x)} = \int_a^b x^y \, dy.$$

Da für alle $\varepsilon > 0$ $[\varepsilon, 1] \times [a,b] \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^y$ stetig ist, folgt mit dem **Satz von Fubini**

$$\int_\varepsilon^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \left(\int_a^b x^y \, dy \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_\varepsilon^1 x^y \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \frac{1 - \varepsilon^{y+1}}{y+1} \, \mathrm{d}y.$$

Nun ist für alle $0 < a \le y \le b$ und $\varepsilon < 1$ die Abbildung $y \mapsto \varepsilon^{y+1}/(y+1)$ (streng) fallend und daher gilt

$$0 \le \int_a^b \frac{\varepsilon^{y+1}}{y+1} \, \mathrm{d}y \le (b-a) \frac{\varepsilon^{a+1}}{a+1} \to 0,$$

wenn $\varepsilon \to 0$. Damit, mit obiger Gleichung und der Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals erhält man

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)} \, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{y+1} \, \mathrm{d}y = \ln\left(\frac{b+1}{a+1} \right).$$

Aufgabe 4 (2+4+4=10 Punkte)

a) Berechnen Sie die komplexen Fourierkoeffizienten der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos^3(x)$.

b) Sei $f \in H(\mathbb{C})$ nicht-konstant. Zeigen Sie, dass es zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ derart gibt, dass $\lim_{n \to \infty} f(z_n) = a$ gilt.

c) Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{, falls } |x| \le 2 \\ 0 & \text{, falls } |x| > 2 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie $\mathcal{F}f$ sowie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x$.

Lösungsvorschlag

a) Es gilt zunächst

$$\cos^3(x) = \frac{1}{8} \left(\mathrm{e}^{3ix} + 3\mathrm{e}^{ix} + 3\mathrm{e}^{-ix} + \mathrm{e}^{-3ix} \right).$$

Damit lauten die komplexen Fourierkoeffizienten $c_{\pm 1} = \frac{3}{8}$, $c_{\pm 3} = \frac{1}{8}$ und $c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1, \pm 3\}$.

b) Wir nehmen an, dass ein solches $a \in \mathbb{C}$ existiert, dass für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ gilt, dass $f(z_n) \not\to a$ für $n \to \infty$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|f(z) - a| \geqslant \varepsilon \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir z_n als das Element definieren, das diese Ungleichung für $\varepsilon = 1/n$ verletzt und hätten entgegen der Annahme eine entsprechende Folge gefunden. Somit ist die Funktion

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph (da $f(z) - a \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$) und erfüllt $|h(z)| \leqslant \varepsilon^{-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Der Satz von Liouville liefert nun, dass h und somit auch $f = \frac{1}{h} + a$ konstant ist (h ist per Definition nicht die Nullfunktion), ein Widerspruch.

c) f ist offensichtlich absolut integrierbar. Die Fouriertransformierte lautet

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x = \frac{2\sin(2\xi)}{\xi}.$$

Damit und mit dem **Satz von Plancherel** erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(2x)}{x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{8} \int_{-2}^{2} 1 \, \mathrm{d}x = \pi.$$