# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

## Modulprüfung

### Aufgabe 1 (4+3+3=10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar ist.

(b) Sei $M \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $d \in \mathbb{N}$, eine Matrix mit nicht-trivialem Kern, d.h. $\ker M \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Matrix $M^T M$ positiv semidefinit, aber nicht positiv definit ist.

(c) Sei $B = B^T \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $d \in \mathbb{N}$, eine symmetrische Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_d$. Zeigen Sie die Identität

$$\sum_{i=1}^{d} b_{ii} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i .$$

Hinweis: Ähnliche Matrizen haben dieselbe Spur.

### Aufgabe 2 (5+5=10 Punkte)

(a) Betrachten Sie das Vektorfeld $A : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma A(x,y,z) \cdot \mathrm{d}(x,y,z)$ von $A$ entlang der Kurve $\gamma$, die eine positiv orientierte Einheitskreislinie in der Ebene $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 4\}$ mit Mittelpunkt $(1,1,2)$ beschreibt.

(ii) Sei $C_{r,z}$ die positiv orientierte Kreislinie mit Radius $r > 0$ um die $z$-Achse auf der Höhe $z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\int_{C_{r,z}} A(x,y,z) \cdot \mathrm{d}(x,y,z) = 2\pi$ und erklären Sie, wieso dies keinen Widerspruch zum Satz von Stokes darstellt.

(iii) Ist $A$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Es sei $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0, x+y < 1\}$ das offene Standardsimplex im $\mathbb{R}^2$ und $\Phi$ der $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus

$$\Phi : (0,\infty)^2 \to \Phi((0,\infty)^2), \quad (x,y) \mapsto \Phi(x,y) := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x+y \\ y-x \end{pmatrix}.$$

Fertigen Sie eine Zeichnung von $S$ und $\widetilde{S} = \Phi(S)$ an und berechnen Sie das Integral

$$\int_S \mathrm{e}^{-\frac{(x+y)^2}{2}} \,\mathrm{d}(x,y).$$

**— Bitte wenden! —**

## Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

(a) Sei $d \in \mathbb{N}$ und $A = A^T \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine symmetrische Matrix.

(i) Zeigen Sie, dass der Gradient der quadratischen Form $Q_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,

$$Q_A(x) = \langle x, Ax \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

gegeben ist durch $\nabla Q_A(x) = 2Ax$.

(ii) Zeigen Sie mithilfe der Lagrange-Multiplikator-Methode, dass das Maximum der quadratischen Form $Q_A$ auf der Sphäre $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|^2 = 1\}$ durch den größten Eigenwert gegeben ist. Charakterisieren Sie die Punkte $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, an denen das Maximum angenommen wird.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$g(x,y) = x^2 e^y - y^2 e^{x^2} = 0$$

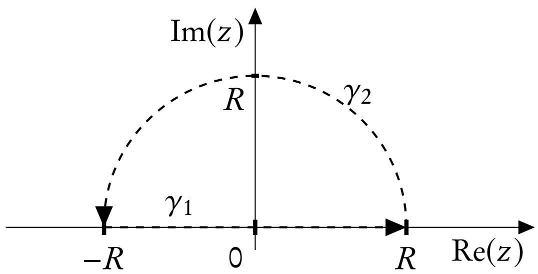
in einer Umgebung des Punktes $(1,1)$ nach $y$ aufgelöst werden kann. Die so implizit definierte Funktion werde mit $f$ bezeichnet, $y = f(x)$. Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von $f$ um $x = 1$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $f$ in einer Umgebung von $x = 1$ beliebig oft differenzierbar ist.

## Aufgabe 4 (4+6=10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) = |t|$, und zeigen Sie damit, dass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(b) Sei $S = \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$ und $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z}}{1+z^2}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus S$. Die regulären Kurven $\gamma_1, \gamma_2$ seien wie in der Skizze mit $R > 1$.




(i) Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ für $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

(ii) Zeigen Sie: $|f(z)| \le \frac{1}{R^2-1}$ für $z \in \mathrm{Bild}(\gamma_2)$.

(iii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Berechnen Sie $\widehat{g}(-1)$, d.h. die Fouriertransformierte von $g$ an der Stelle $-1$.

# Viel Erfolg!

**Hinweise für nach der Klausur:**

- Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **17.04.2018** durch Aushang am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 des Gebäudes 20.30 bekannt gegeben.
- Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **19.04.2018**, zwischen **16:00** und **18:00** im Hörsaal am Fasanengarten statt.
- Mündliche Nachprüfungen finden voraussichtlich in der Woche vom **23.04.** bis **27.04.2018** im Gebäude 20.30 statt.