

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Nachklausur

Aufgabe 1: [6+4+(6+4) = 20 Punkte]

a) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie eine Jordan-Normalform der Matrix aus Teil a) an.

c) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $AB = BA$ und $(A+B)^2 = 0$. Es gelte $\det(A - \lambda I) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$.

(i) Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von B ist.

(ii) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B .

Aufgabe 2: [3+4+(8+2+3)=20 Punkte] Es sei für $R > 1$,

$$G(R) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^{-2}, z \in [1, R]\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Skizzieren Sie den Körper $G(R)$.

(b) Bestimmen Sie das Volumen von $G(R)$. Was gilt für $R \rightarrow \infty$?

HINWEIS: Zylinderkoordinaten und Satz von Cavalieri.

(c) (i) Bestimmen Sie die äußere Normale an die Oberfläche von $G(R)$ im Bereich $z \in (1, R)$.

(ii) Bestimmen Sie das skalare Oberflächenelement do von $G(R)$ im Bereich $z \in (1, R)$.

(iii) Was gilt für die Oberfläche von $G(R)$ für $R \rightarrow \infty$?

Aufgabe 3: [(2+6+4)+(6+2)=20 Punkte]

(a) Es sei

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin(1/\sqrt{x^2 + y^2}), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(i) Ist f stetig?

(ii) Bestimme $\nabla f(x, y)$ für alle Punkte (x, y) in denen dies möglich ist.

(iii) Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ differenzierbar ist.

(b) (i) Es sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $f(0, 0) = 0$. Geben Sie Bedingungen für $\nabla f(0, 0)$ an, sodass $f(f(x, y), y) = 0$ bei $(x, y) = (0, 0)$ lokal nach y auflösbar ist.
Das heißt, dass Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in U$ und $0 \in V$ sowie eine Abbildung $g : U \rightarrow V$ existieren für die

$$f(f(x, g(x)), g(x)) = 0$$

für jedes $x \in U$.

(ii) Bestimmen Sie für $g : U \rightarrow V$ aus b) (i) die Ableitung $g'(0)$.

Aufgabe 4: [(8+4)+8=20 Punkte]

a) (i) Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der Funktionen $f : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} t \sin(t), & t > 0 \\ -t \sin(t), & t \leq 0 \end{cases}$$

für jedes $t \in (-\pi, \pi]$.

HINWEIS: Es gilt $2 \sin(t) \sin(kt) = \cos(t(k-1)) - \cos(t(k+1))$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Für welche $t \in (-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourier-Reihe?

b) Entwickeln Sie die durch $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ für alle $z \in G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ gegebene Funktion in eine Laurentreihe um $z = 1$.

Viel Erfolg!