Musterlösung zur HM II Nachklausur

Wednesday, 9. March 2022 14:27

A1)

Es ist

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen alle EW

$$\det(M-\lambda 1\!\!1) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

daher ist $\lambda_1 = 3$ mit $\mu_A(3) = \mu_G(3) = 1$ (μ_A ist alg. Vielfachheit und μ_G ist geom. Vielfachheit)

und $\lambda_{2/3} = 1$ mit $\mu_A(1) = 2$

wir bestimmen also noch die geometrische Vielfachheit von $\lambda_{2/3} = 1$

$$(M - 1\!\!1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir finden also den Eigenvektor $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum EW. $\lambda_{2/3} = 1$.

Damit ist also $\mu_G(1) = 1$

b) Es ex. eine Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$M = U^T J U \quad \text{wobei} \quad J = D + N$$

und D diagonal sowie N nur Einträge auf der Nebendiagonale

Nach VL. stehen auf D die Eigenwerte (gezählt nach Vielfachheiten)

$$\Rightarrow \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da $\mu_G(1) = 1 < 2$ gibt es mindestens ein nichttriviales Jordan-Kästchen

$$\Rightarrow \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine geeignete Wahl für die Jordan-Normalform von M.
(Beachte die Wahl ist nicht eindeutig)

c) i) Wir zeigen, dass jeder Eigenvektor von A auch ein Eigenvektor von B ist.

Sei hierzu $v \in Eig(A,\lambda) \Rightarrow Av = \lambda v$

dann gilt

$$ABv = BAv = \lambda Bv$$
$$\Rightarrow Bv \in Eig(A,\lambda)$$

Nach Voraussetzung ist $\dim(Eig(A,\lambda)) = 1$, da dass charakteristische Polynom drei verschiedene Nullstellen hat.

d.h aber Bv ist parallel zu v

$\Rightarrow Bv = \mu v$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$, sodass $v \in Eig(B,\mu)$

Es folgt also die Behauptung direkt.

ii) Wir bestimmen also die Eigenwerte von B.

Es sei hierzu v ein Eigenwert von A zum EW λ

$\underset{i)}{\Rightarrow}$ v ist ein Eigenwert von B zum EW μ

$$(A-B)^2 = 0 \overset{AB=BA}{\Rightarrow} A^2 + 2AB + B^2 = 0$$
$$\Rightarrow (A^2 + 2AB + B^2)v = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 = 0$$
$$\Rightarrow (\lambda + \mu)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda + \mu = 0$$
$$\Rightarrow \lambda = -\mu \quad \circledast$$

Nach Voraussetzung ist Spektrum$(A) = \sigma(A) = \{0,-1,1\}$

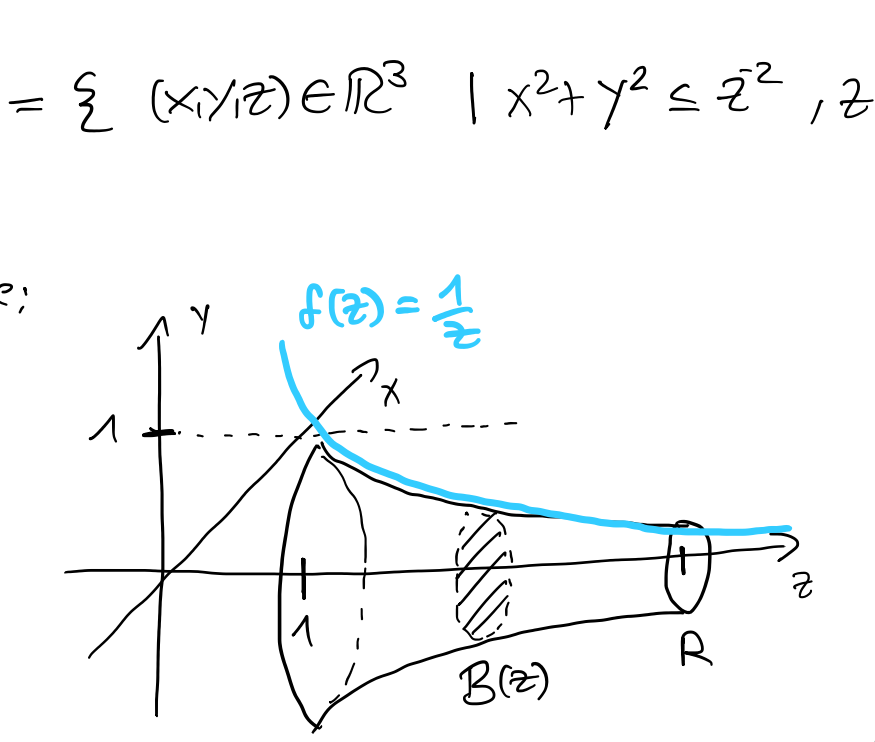
$$\underset{\circledast}{\Rightarrow} \sigma(B) = \{0, 1, -1\}$$

A und B haben also die identischen Eigenwerte.

A2)

$$G(R) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z^{-2},\ z \in [1,R]\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

a) Skizze:



Es handelt sich um das sogenannte "Gabriels-Horn".
Es ist der Körper der durch Rotation der Kurve $\frac{1}{z}$ um die z-Achse entsteht.

b) Das Volumen ist einfach zu bestimmen, denn

$$Vol(G(R)) = \int_{G(R)} d\vec{x} = \int_1^R Area(B(z))\, dz$$

Hierbei wurde im 2. Schritt das Prinzip von Cavalieri verwendet, wobei

$$B(z) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le \tfrac{1}{z^2}\}$$

die schrafierte Fläche in der Skizze ist

Beachte: Die Voraussetzungen von Cavalieri sind trivialerweise erfüllt, da $d\vec{x}$ ein Produktmaß ist und $G(R)$ messbar und damit auch fast alle Schnitte von $G(R)$ messbar sind.

Für volle Punkte reicht natürlich eine knappere Argumentation. (z.B. G hat die Form, dass sich das Prinzip von Cavalieri anwenden lässt.)

$Area(B(z)) = \pi \frac{1}{z^2}$, da $B(z)$ eine Kreisscheibe mit Radius $\frac{1}{z}$ ist.

$$\Rightarrow \quad Vol(G(R)) = \pi \int_1^R \frac{1}{z^2}\, dz = \pi \left[\frac{-1}{z}\right]_1^R = \pi\left(1 - \frac{1}{R}\right)$$

Beachte es gilt $\lim_{R\to\infty} Vol(G(R)) = \pi$

c) Wir bestimmen nun für alle Punkte mit $z \in (1,R)$ die äußere Normale.

Hierfür geben wir $G(R)$ in Zylinderkoordinaten an.
Es ist

$$G(R) = \{\varphi \in [0,2\pi), z \in \mathbb{R}, r \in [0,\infty) \mid r^2 \le \tfrac{1}{z^2} \text{ und } z \in [1,R]\}$$
$$= \{\varphi \in [0,2\pi], z \in \mathbb{R}, r \in [0,\infty) \mid r \le \tfrac{1}{z} \text{ und } z \in [1,R]\}$$

damit ist eine direkte Parametrisierung der Mantelfläche durch

$$u(z,\varphi) = \Phi(r,\varphi)\Big|_{r=\frac{1}{z}} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}\Bigg|_{r=\frac{1}{z}} = \begin{pmatrix} 1/z \cos(\varphi) \\ 1/z \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit } z \in (1,R),\ \varphi \in [0,2\pi)$$

gegeben.

die äußere Normale bilden wir als Kreuzprodukt der entsprechenden Tangentialvektoren.

$$\partial_z u(z,\varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2}\cos(\varphi) \\ -\frac{1}{z^2}\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi u(z,\varphi) = \begin{pmatrix} -1/z \sin(\varphi) \\ 1/z \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_z u(z,\varphi) \times \partial_\varphi u(z,\varphi) = -\frac{1}{z^2}\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -z^2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{z}\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{-1}{z^3}\left[\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -z^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

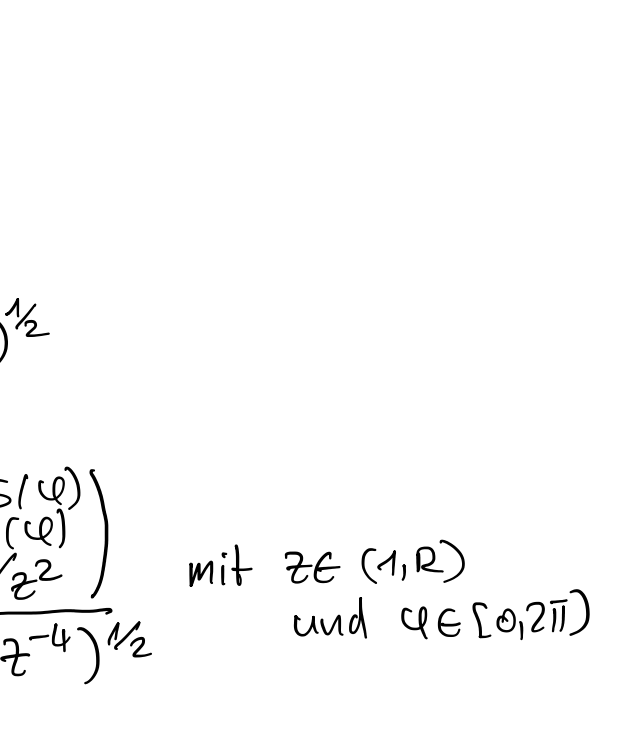
Nebenrechnung:

$$\begin{array}{ccc} \cancel{\cos(\varphi)} & & \cancel{-\sin(\varphi)} \\ \sin(\varphi) & \times & \cos(\varphi) \\ -z^2 & \times & 0 \\ \cos(\varphi) & \times & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & & \cos(\varphi) \\ \cancel{-z^2} & & \cancel{0} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 + z^2\cos(\varphi) \\ + z^2\sin(\varphi) - 0 \\ \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2\cos(\varphi) \\ z^2\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ist also

$$\partial_z u(z,\varphi) \times \partial_\varphi u(z,\varphi) = \frac{-1}{z^3}\begin{pmatrix} z^2\cos(\varphi) \\ z^2\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \underset{\varphi=\frac{\pi}{2}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D.h wir haben eine "innere" Normale bestimmt (vergleiche Skizze)



Die unnormierte äußere "Normale" an die Mantelfläche ist also,

$$N(z,\varphi) = \frac{1}{z^3}\begin{pmatrix} z^2\cos(\varphi) \\ z^2\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir normieren diesen Vektor.

$$\|N(z,\varphi)\| = \frac{1}{z^3}\left(z^4\cos^2(\varphi) + z^4\sin^2(\varphi) + 1\right)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{z^3}(z^4+1)^{1/2} = \frac{z^2}{z^3}(1+z^{-4})^{1/2} = z^{-1}(1+z^{-4})^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad n(z,\varphi) = \frac{z^{-3}\begin{pmatrix} z^2\cos(\varphi) \\ z^2\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}}{z^{-1}(1+z^{-4})^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} z^2\cos(\varphi) \\ z^2\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}}{z^2(1+z^{-4})^{1/2}} = \frac{\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1/z^2 \end{pmatrix}}{(1+z^{-4})^{1/2}} \quad \text{mit } z \in (1,R) \text{ und } \varphi \in [0,2\pi)$$

ist das gesuchte äußere Normalenfeld.

ii) Das skalare Oberflächenelement haben wir in i) bereits bestimmt.
Es ist

$$do = \|N(z,\varphi)\|\, d(z,\varphi) = z^{-1}(1+z^{-4})^{1/2}\, d(z,\varphi).$$

iii) Um die Oberfläche des Körpers zu bestimmen können wir nicht Cavalierie verwenden da do kein Produktmaß ist.
Wir benutzen also das skalare Oberflächenelement und integrieren (für $z \in (1,R)$)

$$Area(G(R)) = \int_{\partial G(R),\, z\in(1,R)} do = \int_0^{2\pi}\int_1^R z^{-1}(1+z^{-4})^{1/2}\, d(z,\varphi)$$
$$= 2\pi \int_1^R z^{-1}(1+z^{-4})^{1/2}\, dz$$

Dieses Integral ist nicht trivial lösbar. Wir schätzen ab

$$Area(G(R)) = 2\pi\int_1^R z^{-1}(1+z^{-4})^{1/2}\, dz \geqslant 2\pi\int_1^R z^{-1}\, dz = 2\pi\ln(R)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{R\to\infty} Area(G(R)) = 2\pi \lim_{R\to\infty}\ln(R) = \infty$$

D.h die Oberfläche ist für $R \to \infty$ unbeschränkt.

Trivia (Dies ist ein Beispiel für ein endliches Volumen das keine endliche Oberfläche hat)

A3)

a) (i) Zunächst ist klar, dass f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig ist.

In $(0,0)$ ist für $x_n, y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$$0 \le |f(x_n,y_n)| = \left|y_n^2 \sin\left(\tfrac{1}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}\right)\right| \le y_n^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ Stetigkeit von f in $(0,0)$

(ii) Zunächst bestimmen wir ∇f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}(x,y)$$
$$\partial_x f(x,y) = y^2\cos\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\tfrac{-1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-3/2}\, 2x$$
$$= -xy^2\,\frac{\cos\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$
$$\partial_y f(x,y) = 2y\sin\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) + y^2\cos\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\tfrac{-1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, 2y$$
$$= 2y\sin\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) - y^3\,\frac{\cos\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

(iii) Wir zeigen, dass f in $(0,0)$ differenzierbar ist.
Zunächst ist klar, dass die Partiellen Ableitungen in $(0,0)$ nicht stetig sind, denn z.B.

$$(x_n,y_n) = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}\pi n}, \tfrac{1}{\sqrt{2}\pi n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
$$\Rightarrow \partial_x f(x_n,y_n) = -\frac{1}{2^{3/2}(\pi n)^3}\,\frac{\cos\left(\left(\frac{1}{\pi^2 n^2}\right)^{-1/2}\right)}{\left(\frac{1}{\pi^2 n^2}\right)^{3/2}}$$
$$= -2^{-3/2}\cos(\pi n)$$
$$= (-1)^n 2^{-3/2} \quad \text{konv. nicht.}$$

Wir argumentieren daher anhand der Definition der Differenzierbarkeit.

f ist in $(0,0)$ diffbar falls für jedes $h \in \mathbb{R}^2$ mit $\|h\| = 1$ der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(0,0) - f((0,0)+\varepsilon h)}{\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon h)}{\varepsilon}$$

existiert

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon h)}{\varepsilon} \overset{h=(h_1,h_2)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 h_2^2\,\frac{\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\|h\|}\right)}{\varepsilon}$$
$$= h_2^2 \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\sin(1/\varepsilon) = 0, \text{ denn}$$

es ist $0 \le |\varepsilon\sin(\frac{1}{\varepsilon})| \le |\varepsilon| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$

$\Rightarrow f$ ist in $(0,0)$ differenzierbar.

b) (i) Die Aussage folgt direkt aus dem Satz über die implizit definierte Funktion.
Hierfür definieren wir zuerst $F \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ als

$$F(x,y) = f(f(x,y),y)$$

Es ist dann $F(0,0) = f(f(0,0),0) = f(0,0) = 0$

Damit F lokal bei $(x,y) = (0,0)$ nach y auflösbar ist, muss daher noch zusätzlich gelten

$$\partial_y F(0,0) \ne 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_y f(f(x,y),y)\Big|_{(x,y)=(0,0)} = \left(\partial_1 f(f(x,y),y)\,\partial_2 f(x,y) + \partial_2 f(x,y)\right)\Big|_{(x,y)=(0,0)}$$
$$= \partial_2 f(x,y)\left(\partial_1 f(f(x,y),y) + 1\right)\Big|_{(x,y)=(0,0)}$$
$$= \partial_2 f(0,0)\left(\partial_1 f(0,0) + 1\right)$$
$$\ne 0 \quad \text{d.h } \partial_2 f(0,0) \ne 0 \text{ und } \partial_1 f(0,0) \ne -1$$

$$\text{d.h} \quad \nabla f(0,0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left(\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}\right)$$

(ii) Wir bestimmen die Ableitung $g'(0)$ für die implizit geg. Funktion, sodass

$$f(f(x,g(x)),g(x)) \equiv 0 \quad \text{auf geeigneten Umgebungen.}$$

Es ist, $\partial_x f(f(x,g(x)),g(x)) = 0 \quad \forall (x,y) \in (U,V)$

$$\Rightarrow \partial_1 f(f(x,g(x)),g(x))\,\partial_x f(x,g(x)) + \partial_2 f(f(x,g(x)),g(x))\,g'(x) = 0$$
$$\Rightarrow \partial_1 f(f(x,g(x)),g(x))\left(\partial_1 f(x,g(x)) + \partial_2 f(x,g(x))\,g'(x)\right) + \partial_2 f(f(x,g(x)),g(x))\,g'(x) = 0$$
$$\overset{x=0}{\Rightarrow} \partial_1 f(0,0)\left(\partial_1 f(0,0) + \partial_2 f(0,0)\,g'(0)\right) + \partial_2 f(0,0)\,g'(0) = 0$$
$$\Rightarrow (\partial_1 f(0,0))^2 + g'(0)\underbrace{\left[\partial_1 f(0,0)\,\partial_2 f(0,0) + \partial_2 f(0,0)\right]}_{=\partial_2 f(0,0)(\partial_1 f(0,0)+1)\ \ne 0 \text{ nach Annahme}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(0) = \frac{-(\partial_1 f(0,0))^2}{\partial_2 f(0,0)(\partial_1 f(0,0)+1)}}$$

A4)

$$f(t) = \begin{cases} t\sin(t), & t > 0 \\ -t\sin(t), & t \le 0 \end{cases}$$

Beachte es gilt $f(-t) = -f(t)$ und damit ist f antisymmetrisch und in der Darstellung $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)$ ist $a_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$

Wir bestimmen noch die b_k's

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt \qquad k \ge 1$$
$$= \frac{1}{\pi}\, 2\int_0^{\pi} t\sin(t)\sin(kt)\, dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\left(\cos(t(1-k)) - \cos(t(k+1))\right) dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} t\cos(t(k-1))\, dt - \int_0^{\pi} t\cos(t(k+1))\, dt\right]$$

Allgemein gilt

$$\int_0^{\pi} t\cos(tn)\, dt \overset{n\ne 0}{=} \left[t\,\frac{\sin(tn)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin(tn)}{n}\, dt$$
$$= -\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(tn)\, dt = \frac{1}{n^2}\left[\cos(nt)\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{n^2}(\cos(n\pi) - 1)$$
$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

$$\int_0^{\pi} t\cos(tn)\, dt \overset{n=0}{=} \int_0^{\pi} t\, dt = \frac{\pi^2}{2}$$

Wir unterscheiden also 3 Fälle

$k = 1$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \int_0^{\pi} t\cos(2t)\, dt\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi^2/2 - \frac{1-1}{4}\right) = \frac{2\pi^2}{\pi\, 2} = \pi$$

k gerade

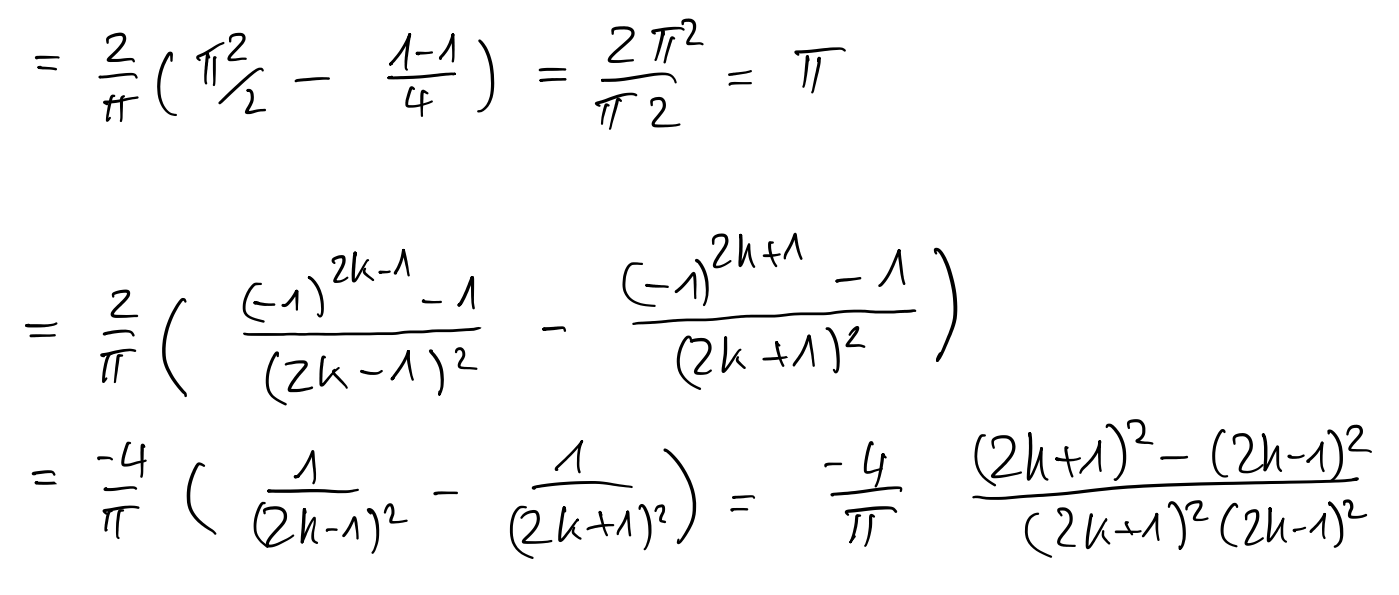
$$\Rightarrow b_{2k} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^{2k-1} - 1}{(2k-1)^2} - \frac{(-1)^{2k+1} - 1}{(2k+1)^2}\right)$$
$$= \frac{-4}{\pi}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{-4}{\pi}\,\frac{(2k+1)^2 - (2k-1)^2}{(2k+1)^2(2k-1)^2}$$
$$= \frac{-4}{\pi}\,\frac{8k}{(2k+1)^2(2k-1)^2}$$

k ungerade, $k > 1$

$$\Rightarrow b_{2k+1} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{0}{(2k)^2} - \frac{0}{(2k+2)^2}\right) = 0$$

(ii) Die Funktion f ist auf $(-\pi,\pi)$ stetig und damit konvergiert die Fourierreihe für jedes $t \in (-\pi,\pi)$ gegen $f(t)$

Skizzen:



Desweiteren ist die periodische Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$ in π und $-\pi$ stetig da $\lim_{t\to\pi} f(t) = \lim_{t\to -\pi} f(t) = 0$

(iii) Wir bestimmen die Laurent-Reihe der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{z-2}$$
$$= \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{(z-1)+1-2}$$
$$= \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{(z-1)-1}$$
$$= \frac{-1}{z-1}\,\frac{1}{1-(z-1)}$$

Nach der geometrischen Reihenforme gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k = \frac{1}{1-\lambda} \quad \text{für } |\lambda| < 1$$

und somit ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k = \frac{1}{1-(z-1)} \quad \text{für } |z-1| < 1$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{-1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k \quad \text{für } |z-1| < 1$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)(z-1)^{k-1} = \sum_{k=-1}^{\infty}(-1)(z-1)^k$$

was gerade gesuchte Laurentreihe bei $z=1$ ist.