Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschlag zur Nachprüfung

Aufgabe 1 ((8 + 7) + 5 = 20 Punkte).

(a) Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

  (i) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix A.

  (ii) Bestimmen Sie so eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, dass $S^{-1}AS$ Diagonalform hat.

(b) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Matrizen, deren Bilder senkrecht aufeinander stehen, das heißt, für alle $a \in \operatorname{Bild} A$ und alle $b \in \operatorname{Bild} B$ gilt $a \perp b$. Zusätzlich sei A hermitesch. Berechnen Sie ABv für alle $v \in \mathbb{C}^n$.
Hinweis: Man kann den Spektralsatz benutzen.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Wir bestimmen das charakteristische Polynom von A. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -3+\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)\lambda\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda(3-\lambda)(3+\lambda). \end{aligned}$$

Hier haben wir in der zweiten Gleichheit die zweite Zeile von der ersten abgezogen und in der dritten Gleichheit die erste Spalte auf die zweite addiert. In der vierten Gleichheit haben wir nach der ersten Zeile entwickelt und in der fünften Gleichheit die erste Spalte auf die zweite addiert und den Faktor λ aus der zweiten Spalte herausgezogen. Da die Eigenwerte einer Matrix genau die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms, sind die Eigenwerte genau 0, 3 und -3.

(ii) Nach dem Spektralsatz erfüllen jeweils zu den Eigenwerten gehörende Eigenvektoren als Spalten in eine Matrix geschrieben die Anforderungen an S. Daher ermitteln wir nun Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten.

Da die Summe der drei Spalten von A den Nullvektor ergibt, ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0 der Vektor $(1, 1, 1)$.

Um einen Eigenwert zum Eigenvektor 3 zu finden, berechnen wir

$$\operatorname{Kern}(A - 3I) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1-3 & -2 & 1 \\ -2 & 1-3 & 1 \\ 1 & 1 & -2-3 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Da die Differenz der ersten beiden Spalten den Nullvektor ergibt, ist $(1, -1, 0)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 3.

Analog berechnen wir

$$\operatorname{Kern}(A + 3I) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1+3 & -2 & 1 \\ -2 & 1+3 & 1 \\ 1 & 1 & -2+3 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Summe der ersten beiden Spalten das Doppelte der dritten Spalte ist, ist $(1, 1, -2)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -3.

Somit erfüllt nach dem Spektralsatz die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

die geforderten Eigenschaften.

(b) **Lösungsvariante 1:** Nach dem Spektralsatz für hermitesche Matrizen gibt es eine Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A. Es sei λ_k der zugehörige Eigenwert zu v_k für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Wir bemerken, dass für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ genau dann $\lambda_k \neq 0$, wenn $v_k \in \operatorname{Bild}(A)$. Somit stehen alle v_k, die zu Nicht-Null-Eigenwerten von A gehören, senkrecht auf allen $v \in \operatorname{Bild} B$. Mit dem Spektralsatz berechnen wir für alle $v \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} ABv &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (Bv \mid v_k) v_k \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $Bv \in \operatorname{Bild} B$ und somit $(Bv \mid v_k) = 0$ genau dann, wenn $\lambda_k \neq 0$.

Lösungsvariante 2: Alternativ gilt für alle $v \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} & Bv \in \operatorname{Bild}(A)^{\perp} \\ \iff & (Bv \,|\, Aw) = 0 \quad \forall w \in V \\ \iff & (ABv \,|\, w) = 0 \quad \forall w \in V \\ \iff & ABv = 0, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Äquivalenz die Selbstadjungiertheit von A genutzt haben. Da die erste Relation trivialerweise gilt, folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 2 ($(8 + 6) + 6 = 20$ Punkte)**.**

(a) Es sei $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$.

(i) Berechnen Sie die (komplexen) Fourierkoeffizienten c_k von f für $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Nutzen Sie die oben berechneten Fourierkoeffizienten, um

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

zu zeigen.
Hinweis: Nach der Vorlesung gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2.$$

(b) Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 y^2 \log(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f in $(0, 0)$ differenzierbar ist.
Hinweis: Polarkoordinaten können hilfreich sein.

Lösungsvorschlag.

(a) (i) Zunächst gilt für $k = 0$, dass

$$2\pi c_0 = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \mathrm{d}x = 2 \int_0^{\pi} x \mathrm{d}x = \pi^2,$$

also $c_0 = \pi/2$. Für $k \neq 0$ gilt ferner mit partieller Integration

$$2\pi c_k = \int_{-\pi}^{\pi} |x| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{0} -x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{\mathrm{i}}{k}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_{x=-\pi}^{0} + \frac{\mathrm{i}}{k}\int_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x + \left[\frac{\mathrm{i}}{k}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right]_{x=0}^{\pi} - \frac{\mathrm{i}}{k}\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{k}\pi(-1)^k + \frac{1}{k^2}\big((-1)^k - 1\big) + \frac{\mathrm{i}}{k}\pi(-1)^k + \frac{1}{k^2}\big((-1)^k - 1\big) \\
&= \begin{cases} 0, & k \text{ gerade}, \\ -\dfrac{4}{k^2}, & k \text{ ungerade}, \end{cases}
\end{aligned}
$$

also $c_k = -2/(k^2\pi)$ für k ungerade und $c_k = 0$ für gerade k mit $k \neq 0$.

(ii) Wir berechnen zunächst

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^3.$$

Somit gilt mit dem Hinweis und mit dem Fakt, dass $(-k)^2 = k^2$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2 \\
\iff \frac{\pi^2}{3} &= \frac{\pi^2}{4} + \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ k \text{ ungerade}}} \left|-\frac{2}{k^2\pi}\right|^2 \\
\iff \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z},\\ k \text{ ungerade}}} \frac{4}{k^4\pi^2} &= \frac{\pi^2}{12} \\
\iff \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} &= \frac{\pi^4}{96}.
\end{aligned}
$$

(b) Um Differenzierbarkeit in $(0,0)$ zu zeigen, berechnen wir zunächst die partiellen Ableitungen in $(0,0)$. Hier erhalten wir für $t > 0$

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \frac{0}{t} = 0 \to 0$$

für $t \to 0$. Somit ist $A \coloneqq (0,0)$ unser Kandidat für die Ableitung in $(0,0)$.

Wir verwenden Polarkoordinaten, setzen also $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ für $r \in \mathbb{R}_+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Damit gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - A(0,0)}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \frac{x^2y^2\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{r^2 \cos^2 \varphi r^2 \sin^2 \varphi \log r^2}{r} \\
&= 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi r^3 \log r \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

für $r \to 0$ beziehungsweise $(x, y) \to (0, 0)$. Hierbei haben wir genutzt, dass mit der Regel von l'Hospital

$$\frac{\log r}{r^{-3}} = \frac{r^{-1}}{-3r^{-4}} = -3r^3 \to 0$$

für $r \to 0$. Somit ist f in $(0, 0)$ tatsächlich differenzierbar. □

Aufgabe 3 (20 Punkte)**.** Es seien

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto xy + y^2$$

und

$$A := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 3y^2 \leq 4\big\}.$$

Berechnen Sie alle Stellen lokaler Minima und Maxima von f auf A.

Lösungsvorschlag. Es seien $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 3y^2 < 4\}$ und $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 3y^2 = 4\}$. Wir untersuchen f auf B und C getrennt auf Extrema.

Um f in B auf Extrema zu überprüfen, berechnen wir

$$
\begin{aligned}
& f'(x, y) = 0 \\
\iff & (y, x + 2y) = 0 \\
\iff & y = 0 \wedge y = 0.
\end{aligned}
$$

Somit ist $(0, 0)$ der einzige stationäre Punkt von f. Weiter ist

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix sind als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$-\lambda(2 - \lambda) - 1 = (\lambda - 1)^2 - 2 = 0$$

gegeben durch $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} > 0$ und $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2} < 0$. Somit ist die Matrix indefinit; also hat f im Punkt $(0, 0)$ kein lokales Extremum in B.

Um f in C auf Extrema zu überprüfen, wenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange an. Hierzu setzen wir $h : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto x^2+3y^2-4$. Da $C = h^{-1}(\{0\})$, ist C abgeschlossen. Da f stetig ist, nimmt f auf C also ein Maximum und ein Minimum an.

Ferner gilt $h'(x, y) = (2x \;\, 6y)$. Somit hat h' vollen Rang für alle $(x, y) \neq (0, 0)$, wobei $(0, 0) \notin C$. Es sei $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, \lambda) \mapsto f(x, y) + \lambda h(x, y)$. Dann gilt

$$\operatorname{grad} L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} y + 2\lambda x \\ x + 2y + 6\lambda y \\ x^2 + 3y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Die Nullstellen von grad L sind also genau die Punkte, für die

$$y + 2\lambda x = 0, \tag{1}$$
$$x + 2y + 6\lambda y = 0, \tag{2}$$
$$x^2 + 3y^2 - 4 = 0. \tag{3}$$

Um die Nullstellen von grad L zu berechnen, unterscheiden wir dazwischen, ob x gleich 0 oder ungleich 0 ist.

Fall 1: $x = 0$**.** In diesem Fall folgt aus Gleichung (1), dass $y = 0$, was im Widerspruch zu Gleichung (3) steht.

Fall 2: $x \neq 0$**.** In diesem Fall folgt aus Gleichung (1)

$$y = -2\lambda x. \tag{4}$$

Einsetzen in Gleichung (2) ergibt

$$\begin{aligned} & x - 4\lambda x - 12\lambda^2 x = 0 \\ \iff\; & \lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{12} = 0 \\ \iff\; & \lambda = -\frac{1}{2} \vee \lambda = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden die beiden Fälle, in denen $\lambda = -1/2$ beziehungsweise $\lambda = 1/6$ ist.

Fall 2.1: $\lambda = -1/2$**.** Einsetzen in Gleichung (3) ergibt zusammen mit Gleichung (4)

$$\begin{aligned} & x^2 + 3x^2 - 4 = 0 \\ \iff\; & x = \pm 1, \end{aligned}$$

also erhalten wir mögliche Minima beziehungsweise Maxima bei $(1, 1)$ und $(-1, -1)$.

Fall 2.2: $\lambda = 1/6$**.** Einsetzen in Gleichung (3) ergibt zusammen mit Gleichung (4)

$$x^2 + 3\left(-\frac{1}{3}x\right)^2 - 4 = 0$$

$$\begin{aligned}\iff\ & x^2 + \frac{1}{3}x^2 - 4 = 0 \\ \iff\ & x = \pm\sqrt{3},\end{aligned}$$

also erhalten wir mögliche Minima beziehungsweise Maxima bei $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/3)$ und $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}/3)$.

Einsetzen in f ergibt

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 2, \\ f(-1,-1) &= 2, \\ f\left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= -\frac{2}{3} \text{ und} \\ f\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Somit liegen bei $(1,1)$ sowie $(-1,-1)$ die beiden lokalen Maxima und bei $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/3)$ sowie $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}/3)$ die beiden lokalen Minima von f. □

Aufgabe 4 (8 + 7 + 5 = 20 Punkte)**.**

(a) Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ das beschränkte Gebiet, das von der Kurve

$$\gamma\colon\ [0,\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

berandet wird. Berechnen Sie $|\overline{G}|$ mithilfe des Satzes von Gauß.

(b) Es sei

$$\gamma\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \frac{\cos z - 1}{z^3} \mathrm{d}z.$$

Hinweis: Es gilt $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k ((2k)!)^{-1} z^{2k}$.

(c) Es seien $f\colon\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant sowie $R \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass f in der Kugel um 0 mit dem Radius R nur endlich viele Nullstellen hat.

Lösungsvorschlag.

(a) Da γ eine einfach geschlossene und doppelpunktfreie Kurve ist, gilt nach dem Integralsatz von Gauß

$$\int_\gamma v \cdot \mathrm{d}s = \int_{\overline{G}} (\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y))\mathrm{d}(x,y)$$

für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Wie in der Vorlesung und der Übung wählen wir nun so ein Vektorfeld, dass der Integrand des rechten Integrals konstant 1 ist; wir wählen $v(x,y) = (0,x)$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\left|\overline{G}\right| &= \int_{\overline{G}} 1\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_\gamma (0,x) \cdot \mathrm{d}s \\
&= \int_0^\pi (0, \sin t \cos t) \cdot \gamma'(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \sin t \cos t \cos t\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{3}\cos(t)^3\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Wir setzen $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = (\cos z - 1)z^{-3}$. Die Funktion f ist holomorph und für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ erhält man die Laurentreihendarstellung

$$f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^3} = \frac{\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} - 1}{z^3} = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k-3}.$$

Folglich gilt $\operatorname{res}(f,0) = -1/2$. Der Residuensatz liefert, da $gamma$ ein stückweise stetig differenzierbarer, einfach geschlossener und positiv orientierter Weg ist,

$$\int_\gamma \frac{\cos z - 1}{z^3}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}(f,0) = -\pi\mathrm{i}.$$

(c) Wir schreiben $B(0,R)$ für die Kugel um 0 mit dem Radius R. Angenommen, f hat unendlich viele Nullstellen. Dann existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise verschiedenen Nullstellen in $B(0,R)$. Da $B(0,R)$ beschränkt ist, ist es auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit folgt mit dem Satz von Bolzano–Weierstraß, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat. Da die Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise verschieden sind, ist der Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Häufungspunkt der Nullstellenmenge von f. Nach dem Identitätssatz ist f konstant 0, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Damit hat f nur endlich viele Nullstellen in $B(0,R)$. $\square$