

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik**Nachklausur****Aufgabe 1:** (10 + 10 = 20 Punkte)

(a) Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

- i) Begründen Sie, weshalb B diagonalisierbar ist, ohne die Matrix explizit zu diagonalisieren.
- ii) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B samt ihrer jeweiligen algebraischen Vielfachheit.
- iii) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert λ von B eine Orthonormalbasis des zugehörigen Eigenraumes $E_B(\lambda)$.
- iv) Bestimmen Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ derart, dass $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat. Geben Sie S^{-1} explizit an.

(b) Im folgenden sei $n \in \mathbb{N}$, beweisen oder widerlegen Sie die Aussagen:

- i) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^T = -A$, dann gilt $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ für jeden Eigenwert $\lambda \neq 0$ von A .
- ii) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ hat immer mindestens einen reellen Eigenwert.
- iii) Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ hat immer mindestens einen reellen Eigenwert.
- iv) Die Abbildung $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}^{2 \times 2} \times \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(A|B) = \det(AB)$$

ist ein Skalarprodukt.

Aufgabe 2: (12 + 8 = 20 Punkte)

a) Gegeben sei die Menge

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 2, y > 0\}.$$

Bestimmen Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $(u, -v)$, (u, v) und $(\sqrt{2}, 0)$ für $(u, v) \in E$, welches maximalen Flächeninhalt hat. Formulieren Sie das Problem als Optimierungsproblem mit einer Nebenbedingung und wenden Sie dann die Multiplikatorenregel von Lagrange an.

HINWEIS: Sie dürfen davon ausgehen, dass es ein solches Dreieck mit maximalen Flächeninhalt gibt.

b) Es sei $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f((x_1, x_2)) := \int_0^{1+x_1} g(rx_2) dr.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f bei $x_0 = (0, 0)$.**BITTE WENDEN!**

Aufgabe 3: (8 + 12 = 20 Punkte)

a) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{(\max\{x, y\})^2}{|x| + |y|} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

i) Ist f in $(0, 0)$ stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii) Ist f in $(0, 0)$ partiell differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x, y, z) = (y - z)^2 e^{(y-z)} - e^{-x^2} \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

i) Zeigen Sie: Es existieren offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $(1, 2) \in U$, $V \subset \mathbb{R}$ mit $3 \in V$ und ein $\varphi \in C^1(U, V)$ so, dass

$$F(x, y, \varphi(x, y)) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in U, z \in V.$$

ii) Bestimmen Sie $(\nabla \varphi)(1, 2)$.

Aufgabe 4: (10 + 10 = 20 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_A |x| d(x, y, z) \quad \text{für } A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [-1, 1], x^2 + y^2 \leq z^2, y \geq 0\}.$$

b) Es sei die Menge E das von den Kurven

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma_1(t) &= (t, \sqrt{2}t^2), \\ \gamma_2 : [\pi/4, 3\pi/4] &\rightarrow \mathbb{R}^2, & \gamma_2(t) &= (\cos(t), \sin(t)), \end{aligned}$$

berandete beschränkte Gebiet. Berechnen Sie den Flächeninhalt $|\overline{E}|$ mit Hilfe eines geeigneten Vektorfeldes $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und des Integralsatzes von Gauß im $\mathbb{R}^2$.

HINWEIS: Begründen Sie weshalb die Kurve $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ geschlossen ist.