

Lösungshinweise 

HM 2 Nachklausur 2023

Musterlösung zur HM2 Physik Nachklausur

A1)

i) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist symmetrisch und daher diagonalisierbar

ii) Wir untersuchen das charakteristische Polynom

$$c_p(\lambda) = \det(B - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\lambda)^2 - 1$$

Wir bestimmen dessen Nullstellen

$$c_p(\lambda) = (1+\lambda)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (1+\lambda)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda_1 = 1 \\ 1+\lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ und } \lambda_2 = -2$$

D.h. $\lambda = 0$ und $\lambda = -2$ sind die gesuchten Eigenwert.

$$\mu_A(\lambda=0) = \mu_A(\lambda=-2) = 1 \text{ und da } \mu_A(\lambda=0) + \mu_A(\lambda=-2) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

$$\text{Gilt } \mu_B(\lambda=0) = \mu_B(\lambda=-2) = 1.$$

iii) Wir bestimmen die Eigenräume.

Beachte. Die Summe der ersten und zweiten Zeile ist null
daher ist $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Kern (B) also EV zum EW 0

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da B als symm. Matrix orthogonal diagonalisierbar

muß $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = v_2$ ($v_1 \perp v_2$ denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$)

ein anderer EV sein. Es ist

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(iv) Wähle $\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\tilde{S}^T \tilde{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Wähle also $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dann ist $S^T = S^{-1}$.

Es gilt nun

$$\tilde{S}^T B S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist diagonal.

b) i) Angenommen $\lambda \in \sigma(A)$, dann ist $Av = \lambda v$ für ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| \neq 0$.

$$\Rightarrow \langle v, Av \rangle = \lambda \|v\|^2 \Rightarrow \langle v, Av \rangle = \overline{\langle A^T v, v \rangle} = \overline{\langle -Av, v \rangle} = -\bar{\lambda} \|v\|^2$$

Durch vergleichen gilt $\lambda \|v\|^2 = -\bar{\lambda} \|v\|^2 \Rightarrow \lambda = -\bar{\lambda}$

Da $\lambda = \operatorname{Re}(\lambda) + i \operatorname{Im}(\lambda) \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) + i \operatorname{Im}(\lambda) = -\operatorname{Re}(\lambda) + i \operatorname{Im}(\lambda)$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

Damit ist die Aussage wahr.

ii) Die Aussage ist falsch. Wähle zum Beispiel $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ so, dass:

$$(A - \lambda \mathbb{1})^2 = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{\pm i\}$$

und damit hat A nur die EW $\pm i$.

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt dies. Die Aussage ist also falsch.

iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ beliebig, dann ist $\det(A - \lambda I) = c_p(\lambda)$ ein Polynom vom Grad drei mit reellen Koeffizienten.

$$\text{Angenommen } \lambda_0 \in \sigma(A) \Rightarrow c_p(\lambda_0) = 0 \Rightarrow c_p(\bar{\lambda}_0) = 0 \\ \Rightarrow \bar{\lambda}_0 \in \sigma(A)$$

Angenommen $\lambda_0 \neq \bar{\lambda}_0$ für alle EW von A dann ist $|\sigma(A)| = \text{Anzahl der EW}$ eine gerade Zahl.

Da die algebraische Vielfachheiten der Nullstellen von $c_p(\lambda)$ sich zu drei addieren müssen ex. ein $\lambda_1 \in \sigma(A)$ mit $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1 \Rightarrow \lambda_1 \in \mathbb{R}$

Alternativ: $c_p(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ für $a_i \in \mathbb{R}$, $a_3 \neq 0$

$$c_p(\lambda) = \lambda^3 (a_3 + a_2 \lambda^{-1} + a_1 \lambda^{-2} + a_0 \lambda^{-3}) < 0 \quad \text{für } |\lambda| \text{ groß genug und } \lambda < 0.$$

Analog ist $c_p(\lambda) > 0$ für $|\lambda|$ groß genug und $\lambda > 0$.

Da c_p als Polynom stetig auf $\mathbb{R}$ ex. nach Zwischenwertsatz also ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $c_p(\lambda_0) = 0$ und damit ein reeller EW.

Die Aussage ist also wahr.

iv) Die Aussage ist falsch. Angenommen $(\cdot | \cdot)$ ist ein Skalarprodukt dann ist $\|\cdot\| = (\cdot | \cdot)^{1/2}$ eine Norm. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann ist

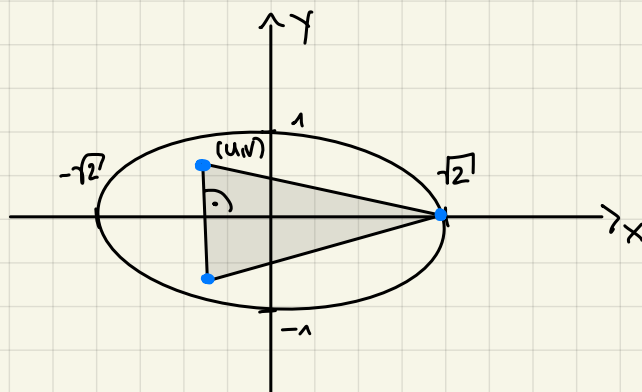
$$\|A\|^2 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{aber } A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht die Nullmatrix. (Widerspruch zu Homogenität ist auch einfach).

A2

a) $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 2 \}$

Skizze



Beachte

$$x^2 + 2y^2 \stackrel{y=0}{=} x^2 \stackrel{!}{=} 2 \\ \Rightarrow x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

Fläche:

$$F(u,v) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - u) \cdot v \\ = v(\sqrt{2} - u) \\ (\text{wähle } v \geq 0 \text{ aus Symm.})$$

$$u=0 \Rightarrow v=1$$

$$F(u,v) = \sqrt{2}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist

$$F(u,v) = v(\sqrt{2} - u)$$

$$\text{für } (u,v) \in E$$

Zunächst ist klar, dass $(u,v) \in \partial E$, denn falls $(u,v) \in \partial E$ dann ex. $(u, \tilde{v})$ mit $\tilde{v} > v$ und $(u, \tilde{v}) \in \partial E$ so dass

$$F(u, \tilde{v}) = \underbrace{\tilde{v}}_{> v} (\sqrt{2} - u) > v(\sqrt{2} - u)$$

Wir nehmen also an, dass $(u,v) \in \partial E \Rightarrow u^2 + 2v^2 = 2$

F ist auf der kompakten Menge ∂E stetig (als Polynom) nimmt also sein Maximum tatsächlich an. (Existenz war vorgegeben)

Wir verwenden die Methoden der Lagrange-Multiplikatoren um $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $h(u,v) = u^2 + 2v^2 - 2 = 0$ zu maximieren.

$F, h \in C^\infty$ als Polynome und $\nabla h = \begin{pmatrix} 2u \\ 4v \end{pmatrix}$ hat auf ∂E vollen Rang. Die Methode ist also anwendbar. (Rangbedingung)

Wir definieren die Lagrange-Fkt.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\lambda, u, v) &= F(u, v) + \lambda h(u, v) \\ &= V(\sqrt{2} - u) + \lambda(u^2 + 2v^2 - 2)\end{aligned}$$

Wir bestimmen alle kritischen Stellen

$$\mathcal{L}'(\lambda, u, v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -V + 2\lambda u = 0 & \text{(i)} \\ \sqrt{2} - u + 4\lambda v = 0 & \text{(ii)} \\ u^2 + 2v^2 - 2 = 0 & \text{(iii)} \end{cases}$$

$$\text{i)} \Rightarrow 2\lambda u = V \Rightarrow \lambda = \frac{V}{2u} \quad u \neq 0, \quad u=0 \stackrel{\text{(i)}}{\Rightarrow} V=0 \Rightarrow F(0,0)=0$$

$$\text{ii)} \Rightarrow 4\lambda v = u - \sqrt{2} \Rightarrow \lambda = \frac{u - \sqrt{2}}{4v} \quad v \neq 0 \Rightarrow u^2 = 2 \Rightarrow u \in \{\pm\sqrt{2}\} \Rightarrow F(u, v) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{V}{2u} = \frac{u - \sqrt{2}}{4v} \Rightarrow 4v^2 = 2u(u - \sqrt{2}) = 2u^2 - 2\sqrt{2}u$$

$$\Rightarrow 2v^2 = u^2 - \sqrt{2}u$$

$$\text{Einsetzen in (iii)} \Rightarrow u^2 + u^2 - \sqrt{2}u - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2u^2 - \sqrt{2}u - 2 = 0$$

$$\Rightarrow u^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}u - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(u - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(u - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow u = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}}$$

$$\bullet) u_1 = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\bullet) u_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow F(\sqrt{2}, v) = 0$$

also Minimum der Fläche

$$\stackrel{\text{iii)}}{\Rightarrow} u_2^2 + 2v_2^2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} + 2v_2^2 = 2$$

$$\Rightarrow v_2^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow v_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\stackrel{v \geq 0}{\Rightarrow} v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nach der Multiplikationsregel von Lagrange liegt das gesuchte Maximum

$$\text{also bei } (u_2, v_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ und } F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot 3$$

(b) $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist zweimal stetig diff'bar

Wir bestimmen die partiellen Ableitungen:

$$\text{Es ist } f(0,0) = \int_0^1 g(r) dr = g(0)$$

$$\partial_{x_1} f(x_1, x_2) = g((1+x_1)x_2) \text{ nach dem Hauptsatz.}$$

$$\text{und } \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = \int_0^{1+x_1} g'(rx_2) r dr$$

$$(\nabla f)(0,0) = \begin{pmatrix} g(0) \\ g'(0) \int_0^1 r dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(0) \\ \frac{1}{2} g'(0) \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen noch die zweiten Ableitungen

$$\partial_{x_1}^2 f(x_1, x_2) = \partial_{x_1} g((1+x_1)x_2) = g'((1+x_1)x_2) x_2 \stackrel{x_1=x_2=0}{=} 0$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_2}^2 f(x_1, x_2) &= \partial_{x_2} \int_0^{1+x_1} g'(rx_2) r dr = \int_0^{1+x_1} g''(rx_2) r^2 dr \\ &\stackrel{x_1=x_2=0}{=} g''(0) \int_0^1 r^2 dr = g''(0) \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} g''(0) \end{aligned}$$

$$\partial_{x_2} \partial_{x_1} f(x_1, x_2) = \partial_{x_2} g((1+x_1)x_2) = g'((1+x_1)x_2) (1+x_1) \stackrel{x_1=x_2=0}{=} g'(0)$$

$$\partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_1, x_2) = \partial_{x_1} \int_0^{1+x_1} g'(rx_2) r dr = g'((1+x_1)x_2) (1+x_1) \stackrel{x_1=x_2=0}{=} g'(0)$$

Es gilt also für die Hessematrix

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & g'(0) \\ g'(0) & \frac{1}{3} g''(0) \end{pmatrix}$$

Damit gilt für das Taylorpolynom $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} [T_2 f] h &= g(0) + (\nabla f)(0,0) \cdot h + \frac{1}{2} h^T H_f(0,0) h \\ &= g(0) + h_1 g'(0) + \frac{1}{2} g'(0) h_2 + \frac{1}{2} 2 g'(0) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} g''(0) h_2^2 \\ &= g(0)(1+h_1) + g'(0) \left(\frac{1}{2} h_2 + h_1 h_2 \right) + g''(0) \frac{1}{6} h_2^2 \end{aligned}$$

A3

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{(\max\{x,y,3\})^2}{|x|+|y|}$

(i) Sei $(x_n, y_n) \rightarrow (0,0)$ dann gilt

$$0 \leq f(x_n, y_n) = \frac{(\max\{x_n, y_n, 3\})^2}{|x_n|+|y_n|} \leq \frac{(|x_n|+|y_n|)^2}{|x_n|+|y_n|} = |x_n|+|y_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Nach dem Sandwich-Kriterium ist f also stetig in $(0,0)$

(ii) Wir prüfen die partielle differenzierbarkeit:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h-0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\max\{h,0,3\})^2}{h|h|} =$$

$$\text{Wähle } h_m = \frac{1}{m} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f(\frac{1}{m}, 0)}{\frac{1}{m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\frac{1}{m}|}{\frac{1}{m}} = 1$$

$$\text{und } h_m = -\frac{1}{m} \Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(\max\{-\frac{1}{m}, 0, 3\})^2}{-\frac{1}{m}} = 0 \rightarrow 0$$

Daher ist f nicht partiell differenzierbar.

b) i) Wir wenden den Satz über implizit def. Funktionen an.

$$\begin{aligned} \text{Zunächst ist klar, dass } F(1,2,3) &= (2-3)^2 e^{2-3} - e^{-1} \\ &= e^{-1} - e^{-1} = 0 \end{aligned}$$

F ist als Linearkombination elementarer Funktionen in einer Umgebung von $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar

Wir prüfen die Regularität der Ableitung

$$\begin{aligned} \partial_z f(x,y,z) &= -2(y-z)e^{(y-z)} - (y-z)^2 e^{(y-z)} \\ &= \underset{(y,z)=(2,3)}{-2(-1)e^{-1} - e^{-1}} = e^{-1}(2-1) = e^{-1} \neq 0 \end{aligned}$$

Daher ist der Satz anwendbar und damit ex. die gesuchte Abbildung.

ii) Wir bestimmen noch die partiellen Ableitungen

$f(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 0$ auf U und daher

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y, \varphi(x, y)) = \partial_1 f(x, y, \varphi(x, y)) + \partial_3 f(x, y, \varphi(x, y)) \partial_x \varphi(x, y)$$

$$\Rightarrow \partial_x \varphi(1, 2) = \frac{-\partial_1 f(1, 2, 3)}{\partial_3 f(1, 2, 3)}$$

$$\text{und analog } \partial_y \varphi(1, 2) = \frac{-\partial_2 f(1, 2, 3)}{\partial_3 f(1, 2, 3)}$$

$$\Rightarrow (\nabla \varphi)(1, 2) = -e \nabla_{(1, 2)} f(1, 2, 3) \stackrel{\text{s.u.}}{=} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Es ist } \partial_x f(x, y, z) = -e^{-x^2} (-2x) \stackrel{x=1}{=} 2e^{-1}$$

$$\partial_y f(x, y, z) = 2(y-z)e^{(y-z)} + (y-z)^2 e^{y-z} \stackrel{(y,z)=(2,3)}{=} -2e^{-1} + e^{-1} = -e^{-1}$$

$$\Rightarrow \nabla_{(1, 2)} f(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-1}$$

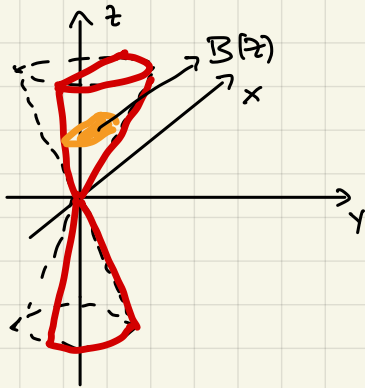
A4

a) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_A |x| \, d(x,y,z)$$

$$A := \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [-1,1], x^2+y^2 \leq z^2, y \geq 0 \}$$

Skizze



$$B(z) := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq z^2, y \geq 0 \}$$

Nach dem Prinzip von Cavalieri und Fubini ist

$$\int_A |x| \, d(x,y,z) = \int_{-1}^1 \int_{B(z)} |x| \, d(x,y) \, dz$$

$$\text{Wir bestimmen also } \int_{B(z)} |x| \, d(x,y)$$

In Polarkoordinaten ist

$$B(z) = \{ \Phi(r,\varphi) \mid r^2 \leq z^2, r \sin(\varphi) \geq 0 \}$$

$$= \{ \Phi(r,\varphi) \mid r \in [0,|z|], \sin(\varphi) \geq 0 \}, \quad \Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\text{Sei } z > 0: \int_{B(z)} |x| \, d(x,y) \stackrel{\text{Trasf.}}{=} \int_0^\pi \int_0^{|z|} r |\cos(\varphi)| \, r \, d(r,\varphi)$$

$$= \int_0^{|z|} r^2 \, dr \int_0^\pi |\cos(\varphi)| \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{3} [r^3]_0^{|z|} 2 \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \, d\varphi$$

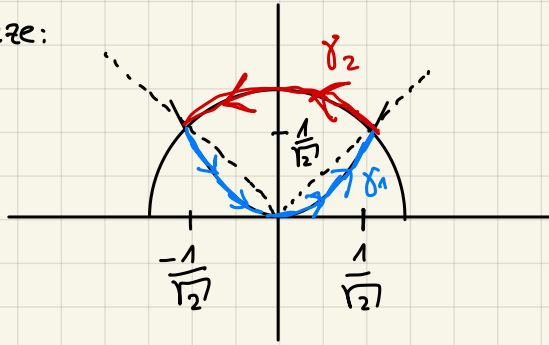
$$= \frac{2}{3} z^3 [\sin(\varphi)]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3} |z|^3$$



$$\text{Es ist also } \int_A |x| \, d(x,y,z) = \int_{-1}^1 \frac{2}{3} |z|^3 \, dz \stackrel{\text{"Symmetrie } z \rightarrow -z"}{=} \frac{4}{3} \int_0^1 z^3 \, dz = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} [z^4]_0^1 = \frac{1}{3}$$

b1

Skizze:



Der Weg ist geschlossen, da

$$\gamma_1\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

und

$$\gamma_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \gamma_3\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Desweiteren ist $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ regulär und der Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$ anwendbar.

Wir wählen das Vektorfeld $V(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

dann ist $\partial_1 V_2(x,y) - \partial_2 V_1(x,y) = 1 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$ und nach dem Integralsatz gilt also

$$|\bar{E}| = \iint_E d(x,y) = \int_{\gamma} \vec{V} ds = \int_{\gamma_1} \vec{V} ds + \int_{\gamma_2} \vec{V} ds$$

Wir bestimmen die beiden Integrale

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \vec{V} ds &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \vec{V}(\gamma_1(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt \quad \text{wobei } \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2}t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}t^2 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2}t \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \underbrace{(2\sqrt{2} - \sqrt{2})}_{=\sqrt{2}} t^2 dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{3} \frac{2}{2^{3/2}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{V} ds = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \vec{V}(\gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt \quad \text{wobei } \dot{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} \vec{v} \, ds = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \pi = \frac{\pi}{4}$$

Es folgt also insgesamt $|\vec{E}| = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$