UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

SS 2006
27.05.2006

1. Übungsklausur
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei der Vektorraum

$$E = \left\{ x = \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\} .$$

a) Bestimme einen Vektor $u \in E$, welcher auf $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ senkrecht steht und die Länge 1 hat.

b) Bestimme die orthogonale Projektion $P(v)$ von $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf E.

c) Schreibe die orthogonale Projektion P auf als $P(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, d.h. bestimme A.

d) Sei $P(x) = Bx$ mit $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ eine orthogonale Projektion auf einen r–dimensionalen Vektorraum $V \subset \mathbb{R}^d$, wobei $0 < r < d$ sein soll. Wie lauten die Eigenwerte von B?

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

b) Bestimme die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 \\ x_2' &= 2x_2 + 3x_3 \\ x_3' &= 3x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

c) Sei $B^{-1} = B^T \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine orthogonale Matrix mit $\det B = 1$ und Spur $B = 2$. Bestimme die möglichen Drehwinkel.

Hinweis: Die Spur ist gleich der Summe der Eigenwerte.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei die quadratische Abbildung $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$q(x) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_1 + \alpha \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} .$$

a) Schreibe $q(x) = x^T Ax + b^T x + c$, d.h. bestimme $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$.

b) Führe eine Hauptachsentransformation durch und bestimme die Art der dazugehörigen Quadrik in Abhängigkeit von α.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei der Differentialoperator L durch

$$(Lu)(x) = -\frac{d^4}{dx^4}u - u$$

mit den Randbedingungen $u(0) = u(2) = u''(0) = u''(2) = 0$.

a) Zeige L ist symmetrisch, d.h.

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle$$

für u, v stetig mit den Randbedingungen $u(0) = u(2) = u''(0) = u''(2) = 0$, $v(0) = v(2) = v''(0) = v''(2) = 0$, wobei

$$\langle u, v\rangle = \int_0^2 u(x)v(x)\,dx .$$

b) Bestimme die Eigenfunktionen und Eigenwerte von L durch den Ansatz

$$u_n(x) = \sin(\beta_n x) ,$$

d.h. suche $\beta_n > 0$ und $\lambda_n \in \mathbb{R}$, so dass $Lu_n = \lambda_n u_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) Löse

$$Lu = f$$

im Fall $f = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$.

Beachte, f ist eine Linear–Kombination zweier Eigenfunktionen.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die korrigierten Übungsklausuren können ab Mittwoch, den **7. Juni 2006**, im Sekretariat (312) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am **8. Juni 2006** von 13.15 – 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.