

Aufgabe 1

a)

Gram-Schmidt Verfahren:

$$\tilde{u} := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$u := \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ leistet das gewünschte.}$$

b)

$$\begin{aligned} P(v) &= \frac{1}{9} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} (2 \ 1 \ 2 \ 0) + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ -2 \ 0 \ 2) \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1d)

Die Eigenwerte von B sind 0 und 1 .

Denn es gilt $Bx = x$ für alle $x \in V$, $Bx = 0$ für alle $x \in V^\perp$ und $\mathbb{R}^d = V + V^\perp$.

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 6 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) [(2-\lambda)^2 - 9] \\ &= (2-\lambda) (\lambda^2 - 4\lambda - 5) = (2-\lambda) (\lambda-5) (\lambda+1) = 0 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -1$

Eigenvektoren:

$$\lambda = 2: (A - I) v_2 = 0 \text{ liefert } v_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = 5: (A - 5I) v_5 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} v_5 = 0 \text{ liefert}$$

$$v_5 = \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = -1: (A + I) v_{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} v_{-1} = 0 \text{ liefert}$$

$$v_{-1} = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \gamma \in \mathbb{R}$$

b)

Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{5t} \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix}, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

2c)

Die möglichen Drehwinkel sind $\pm \frac{\pi}{3}$ bzw. $\pm 60^\circ$.

Begründung:

Für die Eigenwerte von B gilt

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad \lambda_3 = \overline{\lambda_2}$$

$$\text{und } 2 = \text{Spur } B = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 \operatorname{Re} \lambda_2,$$

$$\text{also } \operatorname{Re} \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Für den Drehwinkel θ gilt somit

$$|\theta| = \arccos(\operatorname{Re} \lambda_2) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Aufgabe 3

a)

$$q(x) = x^T \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{= A} x + \underbrace{(8 \ 0 \ 0)}_{= b^T} x + \underbrace{d}_{= c}$$

b)

Hauptachsentransformation:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) [\lambda^2 - 3\lambda - 4]$$

$$= (4-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) = -(\lambda-4)^2(\lambda+1) = 0$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$

Eigenvektoren:

$$\lambda = 4: (A - 4I) v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} v_4 = 0 \quad \text{liefert}$$

$$v_4 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\lambda = -1: (A + I) v_{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} v_{-1} = 0 \quad \text{liefert}$$

$$v_{-1} = \frac{\gamma}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

Die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden eine ONB.

mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\Lambda = S^T A S = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Durchführen der Koordinatentransformation $x = S y$ liefert

$$\tilde{q}(y) = q(Sy) = y^T \Lambda y + \tilde{b}^T y + c \quad \text{mit } \tilde{b} = S^T b, \text{ also}$$

$$\tilde{q}(y) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - y_3^2 + 8y_1 + d$$

Quadratisches Ergänzen

$$z_1 = y_1 + \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1} = y_1 + 1, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3$$

ergibt

$$\tilde{\tilde{q}}(z) = 4z_1^2 + 4z_2^2 - z_3^2 + d - 4$$

Die Normalform der dazugehörigen Quadrik ist also

$$4z_1^2 + 4z_2^2 - z_3^2 + d - 4 = 0$$

Klassifizierung der Quadrik:

$d > 4$: zweischaliges Hyperboloid

$d < 4$: einschaliges Hyperboloid

$d = 4$: Doppelkegel

Aufgabe 4

a)

$$\begin{aligned}\langle Lu, v \rangle &= - \int_0^2 u'''(x) v(x) dx - \int_0^2 u(x) v(x) dx \\&= - [u'''(x) v(x)]_0^2 + \int_0^2 u'''(x) v'(x) dx - \int_0^2 u(x) v(x) dx \\&= \int_0^2 u'''(x) v'(x) dx - \int_0^2 u(x) v(x) dx \\&= [u''(x) v'(x)]_0^2 - \int_0^2 u''(x) v''(x) dx - \int_0^2 u(x) v(x) dx \\&= - \int_0^2 u''(x) v''(x) dx - \int_0^2 u(x) v(x) dx \\&= - [u'(x) v''(x)]_0^2 + \int_0^2 u'(x) v'''(x) dx - \int_0^2 u(x) v(x) dx \\&= \int_0^2 u'(x) v'''(x) dx - \int_0^2 u(x) v(x) dx \\&= [u(x) v'''(x)]_0^2 - \int_0^2 u(x) v'''(x) dx - \int_0^2 u(x) v(x) dx \\&= - \int_0^2 u(x) v'''(x) dx - \int_0^2 u(x) v(x) dx \\&= \langle u, Lv \rangle\end{aligned}$$

b)

$$Lu_n = -(\beta_n^4 + 1) u_n$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$u_n(0) = u_n(2) = u_n''(0) = u_n''(2) = 0 \text{ erhält man}$$

$$\beta_n = \frac{n}{2} \pi \text{ und } \lambda_n = -\left(\frac{n^4}{16} \pi^4 + 1\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

c)

Die Lösung ist

$$u(x) = \lambda_1^{-1} u_1(x) + 5 \lambda_3^{-1} u_3(x)$$

$$= -\left(\frac{1}{16} \pi^4 + 1\right)^{-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) - 5 \left(\frac{81}{16} \pi^4 + 1\right)^{-1} \sin\left(\frac{3\pi}{2} x\right).$$