UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

SS 2006
15.07.2006

2. Übungsklausur
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - 6xy^2 + 12y^2$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten von f und die Matrix der zweiten Ableitungen von f.

b) Berechnen Sie die Ableitung von f im Punkt $P = (1, 1)$ in Richtung des Vektors

$v = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Bestimmen Sie das Taylor–Polynom zweiten Grades für f zum Entwicklungspunkt

$(x_0, y_0) = (0, 1)$.

d) Ermitteln Sie die stationären Punkte von f in $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2\}$. Handelt es sich jeweils um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ seien gegeben durch

$$f(x, y, z) = z^3 e^{6x} + 2y^4 z - 1 ,$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} 1 + \sin(t) \\ 3t - \cos(t^2) \end{pmatrix} .$$

a) Bestimmen Sie die Jacobi–Matrix von $h(x, y, z) = g(f(x, y, z))$ an der Stelle $(x, y, z) = (0, 0, 1)$.

b) Beweisen Sie die lokale Auflösbarkeit von $f(x, y, z) = 0$ nach z in einer Umgebung von $(0, 0, 1)$ und berechnen Sie den Gradienten für die implizit definierte Funktion $z = p(x, y)$ in $(0, 0)$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} 4x + ax^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix} \ , \ a \in \mathbb{R} \ .$$

a) Für welchen Wert von a ist v ein Gradientenfeld? Bestimmen Sie für den Fall, dass v Gradientenfeld ist, den Wert von $\int\limits_c \langle v(x)\,, dx\rangle$, wobei c eine stückweise C^1–Kurve mit Anfangspunkt $(0,0)$ und Endpunkt $(1,1)$ ist.

b) Sei nun $a = 0$ und $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le 1 - x^2\}$. Berechnen Sie $\int\limits_\gamma \langle v(x)\,, \ dx\rangle$, wobei γ den Rand von D einmal positiv durchläuft, sowohl direkt als auch mittels eines Integralsatzes.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

a) Berechnen Sie

$$\int\limits_D \frac{\cos y}{2+x} \, d(x,y) \ ,$$

wobei $D = [-1,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ist.

b) Bestimmen Sie den Wert des absoluten Maximums der Funktion $f(x,y,z) = xyz$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = 3$ sowie den Punkt, an dem es angenommen wird.

Anmerkung: Sie dürfen ohne Nachweis voraussetzen, dass dieses absolute Maximum existiert.

c) Sei K die quaderförmige Kiste ohne Deckel, die von allen diesen Kisten, welche die Oberfläche $3m^2$ haben (wobei bei der Berechnung der Oberfläche nur die Flächeninhalte der Außenflächen berücksichtigt sein sollen), das größte Volumen besitzt. Wie lang sind die Kanten der Grundfläche von K, wie hoch ist K und wie groß ist das Volumen von K?

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die korrigierten Übungsklausuren können ab Montag, den **24. Juli 2006**, im Sekretariat (312) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, **27. Juli 2006** von 13.15 – 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 möglich.