

Aufgabe 1

a)

$$\text{grad } f(x, y) = (6x^2 - 6x - 6y^2 - 12xy + 24y)$$

Matrize der zweiten Ableitungen:

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 12x - 6 & -12y \\ -12y & -12x + 24 \end{pmatrix}$$

b)

$$D_v f(1, 1) = (-6 \quad 12) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

c)

$$T_2(x, y, 0, 1) = 12 - 6x + 24(y-1) - 3x^2 - 12x(y-1) + 12(y-1)^2$$

d)

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow (1): 6x^2 - 6x - 6y^2 = 0 \\ &(2): y(24 - 12x) = 0 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (2):

$$1. \text{ Fall: } y = 0 \xrightarrow{(1)} x = 0 \text{ oder } x = 1$$

$$2. \text{ Fall: } x = 2 \xrightarrow{(1)} y = \pm \sqrt{2}$$

Die stationären Punkte von f , die in B liegen, sind $(0, 0)$ und $(1, 0)$.

1d) Fortsetzung

$Hf(\sigma, \sigma) = \begin{pmatrix} -6 & \sigma \\ \sigma & 24 \end{pmatrix}$ ist indefinit.

In (σ, σ) ist also ein Sattelpunkt.

$Hf(1, \sigma) = \begin{pmatrix} 6 & \sigma \\ \sigma & 12 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

In $(1, \sigma)$ ist ein lokales Minimum.

Aufgabe 2

a)

$$Jh(\sigma, \sigma, 1) = Jg(f(\sigma, \sigma, 1)) Jf(\sigma, \sigma, 1)$$

Es ist

$$Jf(x, y, z) = (6z^3 e^{6x} \quad 8y^3 z \quad 3z^2 e^{6x} + 2y^4)$$

$$Jf(\sigma, \sigma, 1) = (6 \quad \sigma \quad 3)$$

$$Jg(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 3 + 2t \sin(t^2) \end{pmatrix}$$

$$f(\sigma, \sigma, 1) = \sigma$$

$$Jg(f(\sigma, \sigma, 1)) = Jg(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$Jh(\sigma, \sigma, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (6 \quad \sigma \quad 3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 18 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

b)

Es ist $f(\sigma, \sigma, 1) = \sigma$ und $\frac{\partial}{\partial z} f(\sigma, \sigma, 1) = 3 \neq 0$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen

folgt die lokale Auflösbarkeit von $f(x, y, z) = \sigma$

nach z in einer Umgebung von $(\sigma, \sigma, 1)$.

$$\text{grad } p(\sigma, \sigma) = \left(-\frac{f_x(\sigma, \sigma, 1)}{f_z(\sigma, \sigma, 1)} \quad -\frac{f_y(\sigma, \sigma, 1)}{f_z(\sigma, \sigma, 1)} \right)$$

$$= (-2 \quad \sigma)$$

Aufgabe 3

a)

$$\operatorname{rot} v(x, y) = 6x^2 y - 2ax^2 y \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow a = 3$$

v ist also genau dann Gradientenfeld in $\mathbb{R}^2$, wenn $a = 3$ ist.

Sei $a = 3$ und $\varphi(x, y)$ ein Potential von v

$$\Rightarrow \varphi_x(x, y) = 4x + 3x^2 y^2$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = 2x^2 + x^3 y^2 + C(y)$$

$$\Rightarrow \varphi_y(x, y) = 2x^3 y + C_y(y) \stackrel{!}{=} 2x^3 y$$

$$\Rightarrow C_y(y) = 0 \Rightarrow \text{Konstante } C(y) = C, C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = 2x^2 + x^3 y^2 + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\int_c \langle v(x), dx \rangle = \varphi(1, 1) - \varphi(0, 0) = 3$$

b)

1. direkt

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}, \quad 1 \geq t \geq -1$$

3b) Fortsetzung

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \langle v(x), dx \rangle &= \int_{-1}^1 \langle v(\gamma_1(t)), \dot{\gamma}_1(t) \rangle dt \\&= \int_{-1}^1 \left\langle \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\&= \int_{-1}^1 4t \, dt = 2t^2 \Big|_{-1}^1 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \langle v(x), dx \rangle &= \int_1^{-1} \left\langle \begin{pmatrix} 4t \\ 2t^3(1-t^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\&= \int_1^{-1} (4t - 4t^4 + 4t^6) \, dt \\&= \left(2t^2 - \frac{4}{5}t^5 + \frac{4}{7}t^7 \right) \Big|_1^{-1} = \frac{16}{35}\end{aligned}$$

$$\int_{\gamma} \langle v(x), dx \rangle = 0 + \frac{16}{35} = \frac{16}{35}$$

2. mittels Integralsatz

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \langle v(x), dx \rangle &= \int_D \operatorname{rot} v(x) \, dX \\&= \int_D 6x^2 y \, d(x, y) \\&= \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{1-x^2} 6x^2 y \, dy \, dx \\&= \int_{x=-1}^1 3x^2 (1-x^2)^2 \, dx \\&= \int_{-1}^1 (3x^2 - 6x^4 + 3x^6) \, dx \\&= \left(x^3 - \frac{6}{5}x^5 + \frac{3}{7}x^7 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{35}\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

$$\begin{aligned}\int_D \frac{\cos \gamma}{2+x} d(x, \gamma) &= \int_{x=-1}^1 \int_{\gamma=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \gamma}{2+x} d\gamma dx \\&= \int_{x=-1}^1 \frac{1}{2+x} [\sin \gamma]_{\gamma=0}^{\gamma=\frac{\pi}{2}} dx \\&= \int_{-1}^1 \frac{1}{2+x} dx = \ln |2+x| \Big|_{x=-1}^{x=1} = \ln 3\end{aligned}$$

b)

Lagrange Ansatz:

$$\nabla f(x, \gamma, z) = \lambda \nabla g(x, \gamma, z) \quad \text{und} \quad g(x, \gamma, z) = 3, \text{ d.h.}$$

$$\gamma z = \lambda (\gamma + 2z) \quad (1)$$

$$xz = \lambda (x + 2z) \quad (2)$$

$$x\gamma = 2\lambda (x + \gamma) \quad (3)$$

$$x\gamma + 2xz + 2\gamma z = 3 \quad (4)$$

$$(1) - (2): (x - \gamma)z = \lambda(x - \gamma)$$

$$\rightarrow z = \lambda \text{ oder } \gamma = x$$

1. Fall: $z = \lambda$

$$\text{In (2): } xz = xz + 2z^2 \rightarrow z = 0$$

$$\rightarrow \lambda = 0 \xrightarrow{(3)} x\gamma = 0$$

$z = 0$ und $x\gamma = 0$ würde aber zu einem

Widerspruch zu (4) führen, also ist der

1. Fall nicht möglich.

4b) Fortsetzung

2. Fall: $y = x$ (5)

In (3): $x^2 = 4\lambda x$

$\rightarrow x = 0$ oder $\lambda = \frac{1}{4}x$

1. Unterfall: $x = 0$

$\xrightarrow{(5)} y = 0 \xrightarrow{(1)} z = 0$

$x = y = z = 0$ würde zu einem Widerspruch zu (4) führen, also ist der 1. Unterfall nicht möglich.

2. Unterfall: $\lambda = \frac{1}{4}x$ (6)

$\xrightarrow{(2)} xz = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xz \rightarrow z = \frac{1}{2}x$ (7)

(5), (6), (7) in (4): $3x^2 = 3$

$\rightarrow x = y = 1, z = \frac{1}{2}$

oder $x = y = -1, z = -\frac{1}{2}$

$f(1, 1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, f(-1, -1, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

Der Wert des absoluten Maximums ist also gleich $\frac{1}{2}$, und es wird in $(1, 1, \frac{1}{2})$ angenommen.

4b) Fortsetzung

Alternative Rechnung im 2. Fall:

$$2 \cdot (2) - (3): x(2z - y) = 2\lambda(2z - y)$$

$$\rightarrow x = 2\lambda \text{ oder } z = \frac{1}{2}y$$

1. Unterfall: $x = 2\lambda$

$$2 \cdot (3): xy = x^2 + xy \rightarrow x = 0$$

$$\rightarrow \lambda = 0 \xrightarrow{(1)} yz = 0$$

$x = 0$ und $yz = 0$ würde zu einem Widerspruch zu (4) führen, also ist der 1. Unterfall nicht möglich.

2. Unterfall: $z = \frac{1}{2}y$

$$\xrightarrow{(5)} z = \frac{1}{2}x \quad (7)$$

Rest der Rechnung wie beim anderen Rechenweg

4c)

Das vorliegende Extremwertproblem ist genau das aus Teilaufgabe b), wobei x und y die Kantenlängen der Grundfläche, z die Höhe und $f(x, y, z)$ das Volumen ist.

Also gilt für K :

Die Länge von jeder Kante der Grundfläche ist 1 m, die Höhe ist $\frac{1}{2}$ m und das Volumen ist $\frac{1}{2} \text{ m}^3$.