Höhere Mathematik II

Lösungen zur 1. Übungsklausur

SS 2007

(1)

a) Eulersche Differentialgleichung

b) Da das AWP $x^2y'' - 7xy' + 15y = x$, $y(1) = y'(1) = 0$, zu lösen ist, substituieren wir $x = e^t$ und erhalten gemäß Vorlesung die Dgl

(#) $\ddot{\Phi} - 8\dot{\Phi} + 15\Phi = e^t$.

Zur Lösung der homogenen Gleichung wählen wir den Ansatz: $\Phi(t) = e^{\lambda t}$, und erhalten:

$$(\lambda^2 - 8\lambda + 15)\,\Phi(t) = 0,$$

also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 5$.

Als Ansatz für eine spezielle Lösung wählen wir $\Phi(t) = C \cdot e^t$ (vgl. rechte Seite) und erhalten

$$C \cdot e^t - 8Ce^t + 15C \cdot e^t = e^t,$$

also $8C = 1$ oder $C = \frac{1}{8}$.

Die allg. Lösung der Dgl. (#) ist daher durch

$$\Phi(t) = \frac{1}{8}e^t + C_1e^{3t} + C_2e^{5t}$$ gegeben.

Resubstitution ($t = \ln x$) liefert

$$y(x) = \frac{1}{8}x + C_1x^3 + C_2x^5$$ als

allg. Lösung der Dgl. (*).

Die Anfangsbedingungen $y(1) = y'(1) = 0$ führen auf das LGS

$$C_1 + C_2 = -\frac{1}{8}$$
$$3C_1 + 5C_2 = -\frac{1}{8}$$

mit der Lösung $C_1 = -\frac{1}{4}$, $C_2 = \frac{1}{8}$.

Die Lösung des AWPs ist somit $y(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^5$.

<u>Probe:</u> Anfangsbedingungen: $y(1) = 0$ ✓, $y'(1) = 0$ ✓

Dgl.:
$$x^2\left(-\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x^3\right) - 7x\left(\frac{1}{8} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x^4\right)$$
$$+ 15\left(\frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x\right) = x \quad ✓.$$

Aufgabe 2:

a) Es wird f gerade auf $[-\pi, 0]$ fortgesetzt und diese Funktion weiter 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ zu ϕ:

$$y = \phi(x) = |\sin x|, \ -\pi \le x \le \pi, \ \phi(x+2\pi) = \phi(x), \ x \in \mathbb{R}.$$

mit $\phi|_{[0,\pi]} = f$. Da ϕ gerade ist, hat man

$$(F\phi)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

Mit $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\sin x| \cos kx \, dx$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Es gilt $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos kx \, dx \rightsquigarrow a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_1 = 0$

und für $k = 2, 3, \ldots$ mit Bronstein (oder partieller Integration):

$$a_k = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(k+1)x}{2(k+1)} + \frac{\cos(k-1)x}{2(k-1)}\right)\Bigg|_{x=0}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{k+1}-1}{k^2-1}$$

oder: $a_{2n+1} = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $a_{2n} = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$

also: $$(F\phi)(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n+1)(2n-1)}, \ x \in \mathbb{R}$$

b) Da $F\phi$ gleichmäßig konvergiert auf $\mathbb{R}$ und da ϕ stetig ist, gilt (Satz 4 / 18.3) $\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n+1)(2n-1)}$, $0 \le x \le \pi$.

(auf $\mathbb{R}$ gilt $\phi(x) = \frac{2}{\pi} - \cdots$)

c) Für $x = 0$ liefert b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ liefert b) mit $\cos n\pi = (-1)^n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

(3)

a) Es gilt: $L(b_1) = b_1' + 2b_1 = 2b_2 + 2b_1 \in V$,

$L(b_2) = b_2' + 2b_2 = b_3 - b_1 + 2b_2 \in V$ und

$L(b_3) = b_3' + 2b_3 = -2b_2 + 2b_3$.

Weiter ist mit $v_1, v_2 \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$L(v_1+v_2) = (v_1+v_2)' + 2(v_1+v_2) = v_1' + v_2' + 2v_1 + 2v_2$$
$$= L(v_1) + L(v_2).$$

und $L(\lambda v_1) = (\lambda v_1)' + 2\lambda v_1 = \lambda L(v_1)$.

Insgesamt: Ist $v \in V$, also $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$, so ist

$$L(v) = \lambda_1 \underbrace{L(b_1)}_{\in V} + \lambda_2 \underbrace{L(b_2)}_{\in V} + \lambda_3 \underbrace{L(b_3)}_{\in V} \in V,$$

und somit $L: V \to V$ linear.

b) Es sei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$.

Dann ist

$$\lambda_1 \sin^2 x + \lambda_2 \sin x \cos x + \lambda_3 \cos^2 x = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$x = 0$: $\lambda_3 \cdot \underbrace{\cos^2 0}_{=1} = 0$, also $\lambda_3 = 0$.

$x = \frac{\pi}{2}$: $\lambda_1 \underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} = 0$, also $\lambda_1 = 0$.

Somit

$$\lambda_2 \sin x \cos x = 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

also $\lambda_2 = 0$.

Folglich sind b_1, b_2, b_3 linear unabhängig.

c) Nach b) bilden b_1, b_2, b_3 eine Basis von V.

Es genügt also, zu zeigen, dass c_1, c_2, c_3 linear unabhängige Elemente von V sind.

Es gilt $c_1 = b_1 + b_2 \in V$, $c_2 = b_3 + b_2 \in V$ und

$$c_3 = b_1 + b_3 \in V.$$

Mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gelte nun $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} &\lambda_1 (b_1 + b_2) + \lambda_2 (b_2 + b_3) + \lambda_3 (b_1 + b_3) \\ = &(\lambda_1 + \lambda_3) b_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) b_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) b_3 = 0. \end{aligned}$$

Da b_1, b_2, b_3 linear unabhängig sind, muss folglich

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=: C} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelten.

Wegen $\det C = 2$, gilt dies nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, und somit sind c_1, c_2, c_3 linear unabhängig.

d) Nach c) ist:

Achtung: Nur Kurzschreibweise, hier stehen Vektoren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$ also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 - c_1 \end{pmatrix},$$ also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2 + c_3 - c_1 \end{pmatrix}, \text{ also}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{1}{2}(c_2 - c_3 + c_1) \\ \frac{1}{2}(c_2 + c_3 - c_1) \end{pmatrix} \text{ und schließlich}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_1 - c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 - c_3 \\ -c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt:

$$L(b_1) = 2b_1 + 2b_2 \underset{c)}{=} 2c_1,$$

$$\begin{aligned} L(b_2) &= b_3 - b_1 + 2b_2 \\ &= c_1 + c_2 - c_3 + \tfrac{1}{2}(-c_1 + c_2 + c_3) - \tfrac{1}{2}(c_1 - c_2 + c_3) \\ &= c_1 + c_2 - c_3 - c_1 + c_2 = 2c_2 - c_3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} L(b_3) = -2b_2 + 2b_3 &= -c_1 - c_2 + c_3 + (-c_1 + c_2 + c_3) \\ &= 2c_3 - 2c_1. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) $\underline{\det(A)} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{-2} \rightarrow$ A ist regulär

und $\underline{\text{rang}(A) = 4}$.

b) Da A regulär ist, ist das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ <u>für jedes $\vec{y} \in \mathbb{C}^4$</u> eindeutig <u>lösbar</u> ($\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$).

$$\begin{array}{cccc|l}
-1 & 0 & 1 & 0 & y_1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & y_2 \\
1 & -1 & 0 & 0 & y_3 \\
0 & 1 & 0 & 1 & y_4 \\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & -y_1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & y_1 + y_2 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 2y_1 + y_2 + y_3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -y_4 + y_1 + y_2 \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1 & y_2 - y_4 \\
0 & 1 & 0 & 1 & y_4 \\
0 & 0 & 1 & -1 & y_1 + y_2 - y_4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(-y_2 + y_3 + 2y_4) \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(y_2 - y_3) \\
0 & 0 & 1 & 0 & y_1 + \frac{1}{2}(y_2 + y_3) \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(-y_2 + y_3 + 2y_4)
\end{array}$$

Die (allgemeine) Lösung ist: $\underline{\vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y_2 + y_3 \\ y_2 - y_3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \\ -y_2 + y_3 + 2y_4 \end{pmatrix}}$

c) Da M und N VR sind, gilt: $\{\vec{0}\} \subset M \cap N$.

Es sei $\vec{x} \in M \cap N$: Dann gibt es $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 \quad (\in M) \\ &= \gamma \vec{a}_3 + \delta \vec{a}_4 \quad (\in N) \end{aligned} \Rightarrow \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 - \gamma\vec{a}_3 - \delta\vec{a}_4 = \vec{0}$$

und da nach a) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ l.u. sind, folgt:

$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ oder $\vec{x} = \vec{0}$, also $\underline{M \cap N = \{\vec{0}\}}$.

d) Da $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ aus $\mathbb{C}^4$ und l.u. sind, bilden sie eine Basis des $\mathbb{C}^4$. Es sei $\vec{b} \in \mathbb{C}^4$. Dann gibt es eindeutig Zahlen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$, so dass

$$\underline{\vec{b}} = \underbrace{\beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2}_{} + \underbrace{\beta_3 \vec{a}_3 + \beta_4 \vec{a}_4}_{} = \underline{\vec{m} + \vec{n}}$$

gilt.