2. Übungsklausur
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A sowie die zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

b) Begründen Sie auf zwei verschiedene Arten, dass A diagonalisierbar ist.

c) Diagonalisieren Sie A. Bestimmen Sie hierzu eine Matrix C, mit der A auf Diagonalgestalt transformiert wird. Geben Sie die zugehörige Diagonalmatrix an. Bestimmen Sie C^{-1}.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2}$.

a) Zeigen Sie, dass f in $\vec{0} \in \mathbb{R}^2$ durch den Wert 1 stetig ergänzbar ist. Die stetige Ergänzung von f werde mit $\tilde{f}$ bezeichnet. Geben Sie $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an.

b) Bestimmen Sie für jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}\tilde{f}(0,0)$.

c) Begründen Sie, dass $\tilde{f}$ stetig differenzierbar ist.

d) Bestimmen Sie sämtliche Extremstellen von $\tilde{f}$. Handelt es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte? Begründen Sie Ihre Antwort.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien die Vektorfelder

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} uv \\ u+v \\ \sin(u+v) \end{pmatrix}$$

für $(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3$ bzw. $(u,v)^\top \in \mathbb{R}^2$ gegeben.

a) Begründen Sie, dass die so definierten Funktionen $\vec{f}$ und $\vec{g}$ stetig differenzierbar sind.

b) Berechnen Sie $J_{\vec{f}}(x,y,z)$ sowie $J_{\vec{g}}(u,v)$.

c) Schreiben Sie $(\vec{f} \circ \vec{g})(u,v)$ und $(\vec{g} \circ \vec{f})(x,y,z)$ explizit auf, sofern diese Ausdrücke definiert sind.

d) Berechnen Sie $J_{\vec{f}\circ\vec{g}}(u,v)$ mit der Kettenregel sowie $J_{\vec{g}\circ\vec{f}}(x,y,z)$ direkt mit Hilfe von c).

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x,y,z) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - z^2$.

a) Skizzieren Sie die Menge $F = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = 0\}$.

b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung des Punktes $(1,0,1)^\top$ eindeutig nach der Variablen z auflösbar ist. Die Auflösung sei $z = g(x,y)$. Berechnen Sie für $z = g(x,y)$ den Gradienten an der Stelle $(1,0)^\top$.

c) Bestimmen Sie alle Punkte in F, in denen die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nicht eindeutig nach z aufgelöst werden kann. Begründen Sie.

d) Geben Sie die in Aufgabenteil b) genannte Funktion g explizit an.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die korrigierten Übungsklausuren können ab Mittwoch, den **18. Juli 2007**, im Sekretariat (Zi. 312, Mathematikgebäude) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur werden ausschließlich am Donnerstag, den **19. Juli 2007**, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 33 beantwortet.