Höhere Mathematik II

Lösungen zur 2. Übungsklausur

SS 2007

Aufgabe 1

a) $$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

+ ① Schritt; + ② Schritt

$$\underset{\text{nach der 1. Spalte}}{\overset{\text{Entwickeln}}{=}} \underline{(-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3)} \quad \overline{(*)}$$

Die Eigenwerte sind $\underline{\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -3}$. Jeder Eigenwert hat die algebraische Vielfachheit 1 (Exponenten in $\overline{(*)}$) und damit auch die geometrische Vielfachheit 1. (Vorlesung: $1 \le$ geom Vielfachheit $\le$ algebr Vielf)

b) A ist diagonalisierbar, da A symmetrisch ist.
A ist diagonalisierbar, da es drei l. u. Eigenvektoren gibt (Satz der Vorlesung). A ist diagonalisierbar, da für jeden EW algebr V = geom V gilt.

c) EV $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ zu $\lambda_1 = 0$: $-x+y=0$, $y-z=0$

$$\rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu $\lambda_2 = -1$: $x-y+z=0$, $y=0$: $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

zu $\lambda_3 = -3$: $2x+y=0$, $x+y+z=0$: $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},\quad C^{-1} = C^T$$

Da A symmetrisch ist, ist C orthogonal. Dann gilt $C^{-1} = C^T$.

(2)

1. Möglichkeit:

a) Für $(x,y)^T \neq (0,0)^T$ ist

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \frac{\left(1+(x^2+y^2)+\frac{1}{2!}(x^2+y^2)^2+\dots\right)-1}{x^2+y^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2!}(x^2+y^2) + \frac{1}{3!}(x^2+y^2)^2 + \dots$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}(x^2+y^2)^k}_{\text{lok. glm. konv. auf } \mathbb{R}^2} =: \tilde{f}(x,y)$$

Es ist $f = \tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ und $\tilde{f}(0,0) = 1$.
Aufgrund der lok. glm. Konvergenz ist $\tilde{f}$ stetig in $\mathbb{R}^2$, also die stetige Fortsetzung von f.

b) + c): Es gilt $$D_1\tilde{f}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)!}\, x\,(x^2+y^2)^{k-1}$$

und $$D_2\tilde{f}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)!}\, y\,(x^2+y^2)^{k-1}$$

$\rightsquigarrow$ lok. glm. Konvergenz $\Rightarrow$ partielle Ableitungen sind stetig und $D_1\tilde{f}(0,0) = 0 = D_2\tilde{f}(0,0)$.

Damit ist mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\|\vec{v}\| = 1$

$$D_{\vec{v}}\tilde{f}(0,0) = \left(D_1\tilde{f}(0,0),\, D_2\tilde{f}(0,0)\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0.$$

d) Stationäre Stelle: $(\operatorname{grad}\tilde{f})(x,y) = (0,0)$

$$D_1 \tilde{f}(x,y) = x \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)!} (x^2+y^2)^{k-1}}_{>0 \text{ für } x \neq 0}$$

$$D_2 \tilde{f}(x,y) = y \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)!} (x^2+y^2)^{k-1}}_{>0 \text{ für } y \neq 0.}$$

Einzige stationäre Stelle: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wegen $\tilde{f}(x,y) = 1 + \underbrace{\frac{1}{2!}(x^2+y^2) + \frac{1}{3!}(x^2+y^2)^2 + \ldots}_{>0 \text{ für } \binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}}$

liegt an der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein globales Minimum vor.

2. Möglichkeit:

a) Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\lim_{\binom{x}{y} \to \binom{0}{0}} \left(f(x,y) - 1 \right) = \lim_{r \to 0} \left(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 1 \right)$$

$$= \lim_{r \to 0} \left(\frac{e^{r^2} - 1}{r^2} - 1 \right) = \lim_{r \to 0} \frac{e^{r^2} - 1 - r^2}{r^2}$$

$$\underset{\boxed{\frac{0}{0}}}{\overset{\text{l'H.}}{=}} \lim_{r \to 0} \frac{2r e^{r^2} - 2r}{2r} = 0.$$

Da f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, ist f wie gerade gezeigt in $\vec{0}$ durch den Wert 1 stetig ergänzbar.

Die Fortsetzung $\tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & , (x,y)^T \neq (0,0)^T \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$$

b) Es sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. Definitionsgemäß ist

$$D_{\vec{v}} \tilde{f}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\tilde{f}(tv_1, tv_2) - \tilde{f}(0,0)}{t-0}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\dfrac{e^{t^2 \overbrace{(v_1^2+v_2^2)}^{=1}} - 1}{t^2(v_1^2+v_2^2)} \right) - 1}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{t^2} - 1 - t^2}{t^3} \overset{l'H.}{\underset{[\frac{0}{0}]}{=}} \lim_{t\to 0} \frac{2t\, e^{t^2} - 2t}{3t^2}$$

oder

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2}{3} \frac{e^{t^2}-1}{t} \overset{l'H.}{\underset{[\frac{0}{0}]}{=}} \frac{2}{3} \lim_{t\to 0} 2t\, e^{t^2} = 0$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2!} + \dots\right) - 1 - t^2}{t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{t}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = 0$$

c) Partielle Ableitungen in $(0,0)$: Nach b) $D_1\tilde{f}(0,0)=0$ und $D_2\tilde{f}(0,0)=0$. Wenn die partiellen Ableitungen von $\tilde{f}$ in $\binom{0}{0}$ stetig sind, dann ist $\tilde{f}$ in $\binom{0}{0}$ stetig differenzierbar.

Für $\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2\setminus\{\vec{0}\}$ ist

$$D_1\tilde{f}(x,y) = D_1 f(x,y) = \frac{2x\,e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)-(e^{x^2+y^2}-1)\,2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$D_2\tilde{f}(x,y) = D_2 f(x,y) = \frac{2y\,e^{x^2+y^2}(x^2+y^2)-(e^{x^2+y^2}-1)\,2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$\lim_{r\to 0}\left(D_1\tilde{f}(x,y)-D_1\tilde{f}(0,0)\right) = \lim_{r\to 0}\frac{2r\cos\varphi\left[e^{r^2}r^2-e^{r^2}+1\right]}{r^4}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{2\cos\varphi\left[r^2e^{r^2}-e^{r^2}+1\right]}{r^3}$$

$$= 2\cos\varphi\lim_{r\to 0}\frac{\left(r^2\left[1+r^2+\frac{r^4}{2!}+\frac{r^6}{3!}+\dots\right]-\left[1+r^2+\frac{r^4}{2!}+\dots\right]+1\right)}{r^3}$$

$$= 2\cos\varphi\lim_{r\to 0}\frac{r^4\left(\frac{1}{2}+\dots\right)}{r^3} = 0$$

Analog für $D_2\tilde{f}(x,y)$:

$$\lim_{r\to 0}\left(D_2\tilde{f}(x,y)-D_2\tilde{f}(0,0)\right) = 2\sin\varphi\lim_{r\to 0}\frac{r^4\left(\frac{1}{2}+\dots\right)}{r^3} = 0.$$

Folglich sind die partiellen Ableitungen in $(0,0)^T$ stetig, $\tilde{f}$ also stetig differenzierbar in $(0,0)^T$. Da $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^2\setminus\{\vec{0}\}$ stetig db ist (vgl. $D_1\tilde{f}$ und $D_2\tilde{f}$) ist $\tilde{f}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig db.

d) Die Funktion $\tilde{f}$ ist rotationssymmetrisch.

Betrachte deshalb die Funktion $\tilde{g}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Es ist $\tilde{g}(x) = \underbrace{1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \dots}$

streng monoton wachsend für $x > 0$
streng monoton fallend für $x < 0$

Nur bei $x = 0$ liegt eine stationäre Stelle, nämlich ein Minimum, vor.

Aufgrund der Beschaffenheit der Funktion $\tilde{f}$ bzw. $\tilde{g}$ liegt daher im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein globales Minimum vor, und dies ist die einzige Extremstelle.

<u>Alternativ</u>: Kurvendiskussion anstatt Entwicklung.

Aufgabe 3

a) Die Koordinatenfunktionen $f_1(x,y,z) = x+y$, $f_2(x,y,z) = y+z$,
$g_1(u,v) = uv$, $g_2(u,v) = u+v$, $g_3(u,v) = \sin(u+v)$
sind beliebig oft nach allen Variablen stetig partiell differenzierbar.

b) $J_{\vec f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $J_{\vec g}(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) \end{pmatrix}$

c) $\vec f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\vec g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \leadsto \vec f \circ \vec g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist definiert,
und $\vec g \circ \vec f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist ebenfalls definiert.

$$(\vec f \circ \vec g)(u,v) = \vec f(\vec g(u,v)) = \begin{pmatrix} uv + u + v \\ u + v + \sin(u+v) \end{pmatrix}$$

$$(\vec g \circ \vec f)(x,y,z) = \vec g(x+y, y+z) = \begin{pmatrix} (x+y)(y+z) \\ x + 2y + z \\ \sin(x+2y+z) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

d) $$J_{\vec f \circ \vec g}(u,v) \overset{\text{Kettenregel}}{=} J_{\vec f}(\vec g(u,v))\, J_{\vec g}(u,v)$$

$$\overset{\text{mit b)}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v+1 & u+1 \\ \cos(u+v)+1 & \cos(u+v)+1 \end{pmatrix}$$

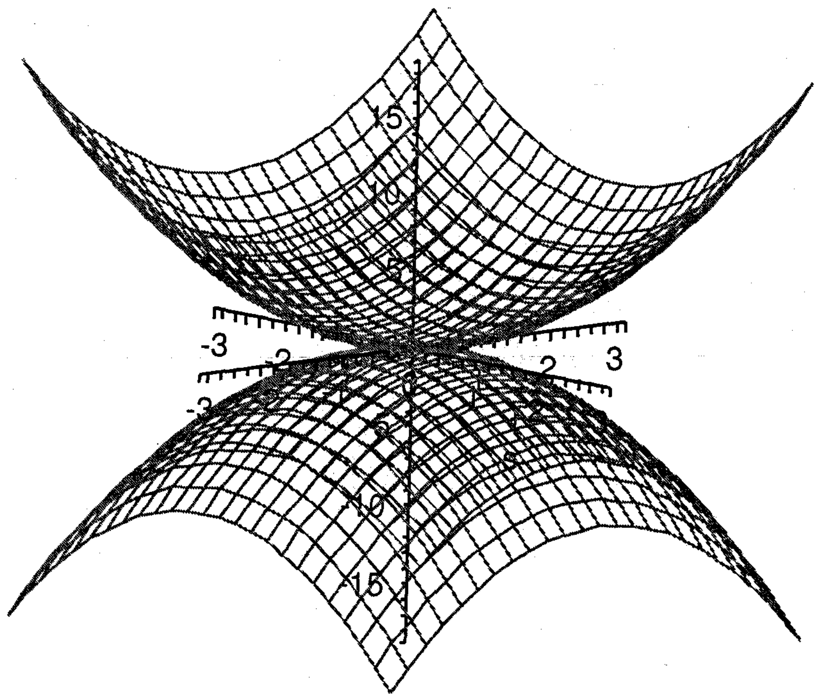
$$J_{\vec g \circ \vec f}(x,y,z) \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} y+z & 2y+z+x & x+y \\ 1 & 2 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix}$$

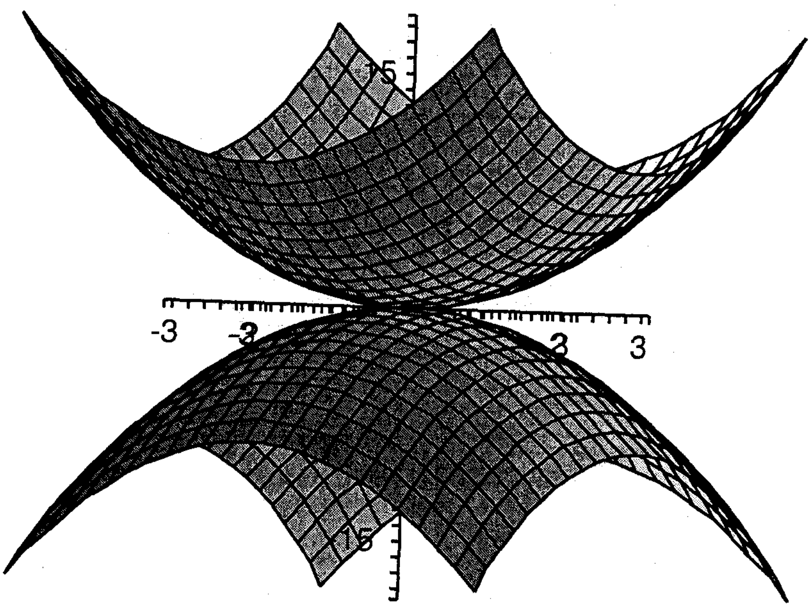
④

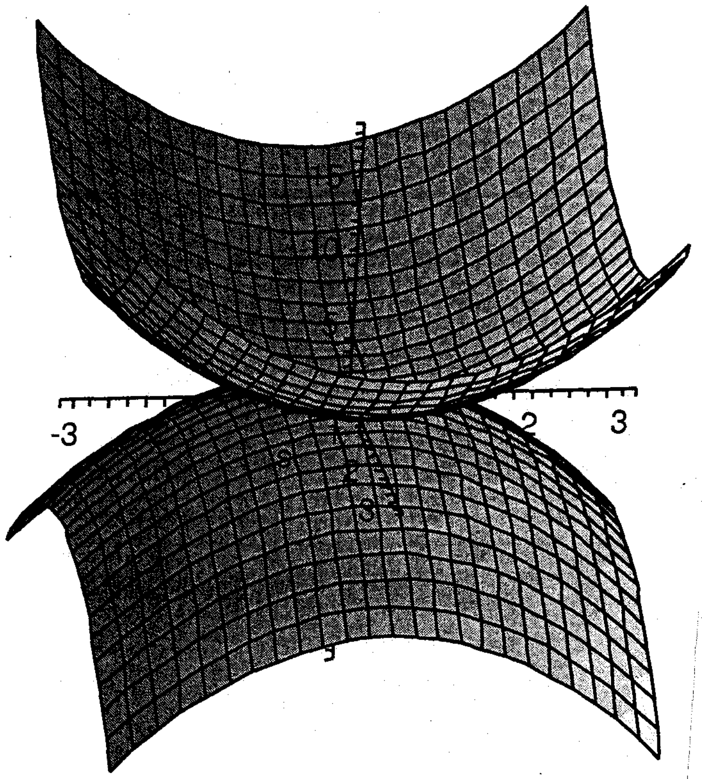
a) $\mathcal{F} = \{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \quad z^2 = (x^2 + y^2)^2 \}$

$\quad = \{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : \quad |z| = \pm (x^2 + y^2) \}$

Skizzen







b) Es gilt $f(1,0,1) = 0$, sowie $D_3 f(x,y,z) = -2z$ und $D_3 f(1,0,1) = -2 \neq 0$.

Satz über $\Longrightarrow$ implizit def. Fkt.

Die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ lässt sich in einer Umgebung des Punktes $(1,0,1)$ eindeutig nach z auflösen, d.h. $z = g(x,y)$.

Es gilt
$$g'(1,0) = -\frac{1}{D_3 f(1,0,1)} \left(D_1 f(1,0,1), D_2 f(1,0,1) \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(4x^3 + 4xy^2, 4y^3 + 4x^2 y \right) \Big|_{(x,y)=(1,0)}$$
$$= (2,0).$$

c) Kritische Stelle für $D_3 f(x,y,z) = 0$: $-2z = 0$, also $z = 0$.

Es sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F$ mit $z = 0$. Dann ist

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \underbrace{-z^2}_{=0} = 0$$, also $x = 0 = y$.

Wie aus der Skizze ersichtlich ist, läßt sich die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ im Punkt $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ nicht eindeutig nach z auflösen, da mit $\begin{pmatrix}x\\y\\z=g(x,y)\end{pmatrix} \in F$ auch $\begin{pmatrix}x\\y\\-z=-g(x,y)\end{pmatrix} \in F$ gilt.

d) Die Funktion $g = g(x,y)$ ist in einer Umgebung des Punktes $(1,0,1)$ gegeben durch $g(x,y) = x^2 + y^2$.

Beweis: Einsetzen und Satz über implizit definierte Funktionen.