SS 2008
05.07.2008

2. Übungsklausur
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und zugehörige Eigenvektoren von $A = \vec{u}\vec{v}^T$.

b) Geben Sie die Dimension jedes Eigenraumes an.
Entscheiden und begründen Sie, ob A diagonalisierbar ist.
Falls A diagonalisierbar ist, geben Sie eine Matrix C derart an, dass

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \text{gilt.}$$

c) Berechnen Sie $\sum\limits_{j=1}^{3} \|\vec{e}_j^{\,T} A\|$ und $\|\sum\limits_{j=1}^{3} A\vec{e}_j\|$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -\pi < x < -1 \\ 1 & \text{für} \quad -1 \le x \le 1\,, \\ 0 & \text{für} \quad 1 < x \le \pi \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x).$$

a) Berechnen Sie die Fourierreihe von f.

b) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} \le f(x).$$

c) Konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig?

d) Für 2π–periodische stetige Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir die stetige, 2π–periodische Funktion

$$F(t) := \int_{-\pi}^{\pi} g(x)h(t-x)\,dx\,, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten der Funktionen g, h und F und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\widehat{F}(k) = 2\pi\hat{g}(k)\hat{h}(k).$$

Tipp: Integrationsreihenfolge vertauschen und substituieren.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Beschreiben Sie die durch

$$\mathcal{F} = \{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 = 9\}$$

gegebene Fläche.

b) Geben Sie in jedem Punkt von $\mathcal{F}$ einen von der z–Achse wegweisenden Normaleneinheitsvektor von $\mathcal{F}$ an.
Geben Sie eine Gleichung für die Tangentialebene von $\mathcal{F}$ in $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{F}$ an.

c) Begründen Sie, dass durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{8+2t-t^2} \\ t+4 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 4$$

die Parameterdarstellung einer Kurve gegeben ist, die ganz in $\mathcal{F}$ liegt.

d) Zeigen Sie, dass die Kurve aus c) in einer Ebene liegt. Geben Sie die Gleichung dieser Ebene in impliziter Form an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

a) Berechnen Sie für jeden Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ die beiden partiellen Ableitungen $D_1 f(\vec{x})$ und $D_2 f(\vec{x})$, sofern diese existieren.

b) Ist $D_1 f$ stetig in $(0, 0)$?

c) Berechnen Sie für jeden Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ und jede Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ die Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f(\vec{x})$, sofern diese existiert.

Tipp: Hierbei kann Ihnen ein Satz aus der Vorlesung einige Arbeit ersparen.

d) Untersuchen Sie f auf Differenzierbarkeit.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den **15. Juli 2008**, im Sekretariat (Zi. 312, Mathematikgebäude) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur werden ausschließlich am Donnerstag, den **17. Juli 2008**, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 beantwortet.