UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

Sommersemester 2009
20.06.2009

Übungsklausur
Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ 2+\lambda & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+2) \cdot \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -(\lambda+2)\big((5-\lambda)(4-\lambda)-2\big) = -(\lambda+2)\big(\lambda^2 - 9\lambda + 18\big) \\
&= -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6).
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $-2, 3, 6$. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$\begin{aligned}
E_A(-2) = \mathrm{Kern}(A + 2I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}, \\
E_A(3) = \mathrm{Kern}(A - 3I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}, \\
E_A(6) = \mathrm{Kern}(A - 6I_3) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \}.
\end{aligned}$$

Da A symmetrisch ist, stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander. Eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A ist somit gegeben durch

$$\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Deshalb ist die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

orthogonal und es gilt

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Das lineare Gleichungssystem $Ax = x$ hat die triviale Lösung $x = \vec{0}$. Würde $Ax = x$ für ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ gelten, dann wäre 1 ein Eigenwert von A, was aber nach **a)** nicht der Fall ist. Folglich ist $x = \vec{0}$ die einzige Lösung von $Ax = x$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die homogene Gleichung $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = (\lambda - 1)\big(\lambda - (1 + 2i)\big)\big(\lambda - (1 - 2i)\big)$$

mit den einfachen Nullstellen 1, $1 + 2i$ und $1 - 2i$. Somit ist

$$\phi_1(x) = e^x\,, \qquad \phi_2(x) = e^x \cos(2x)\,, \qquad \phi_3(x) = e^x \sin(2x)$$

ein zugehöriges Fundamentalsystem und für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ergibt sich $y_H = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Da die rechte Seite der inhomogenen Gleichung $2e^{1x}$ lautet und 1 eine einfache Nullstelle von p ist, kann man eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 2e^x$ mit dem Ansatz $y_P(x) = Cxe^x$, $C \in \mathbb{R}$, erhalten. Dieser führt wegen

$$y_P'(x) = C(x + 1)e^x, \qquad y_P''(x) = C(x + 2)e^x, \qquad y_P'''(x) = C(x + 3)e^x$$

auf

$$C\big((x + 3) - 3(x + 2) + 7(x + 1) - 5x\big)e^x = 2e^x,$$

woraus $C = \frac{1}{2}$ folgt. Also ist $y_P(x) = \frac{1}{2}\,xe^x$.
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 2e^x$ lautet somit

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1e^x + c_2e^x \cos(2x) + c_3e^x \sin(2x) + \tfrac{1}{2}\,xe^x \qquad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Die Funktion f ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Da S abgeschlossen und beschränkt ist, nimmt f auf S Maximum und Minimum an. Zu deren Bestimmung verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange: Ist

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; h(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

definiert, dann gilt $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; h(x, y) = 0\}$ sowie

$$h'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{rg} h'(x, y) < 1$ ist äquivalent zu $x = y = 0$, was jedoch für $(x, y) \in S$ nicht vorkommt. Also gilt $\operatorname{rg} h'(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in S$.

Wir betrachten die Lagrangefunktion

$$L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\; L(x, y, \lambda) = x + xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Dann gilt

$$\operatorname{grad} L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + y + 2\lambda x \\ x + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

und $\operatorname{grad} L(x, y, \lambda) = \vec{0}$ ist äquivalent zu:

$$1 + y + 2\lambda x = 0 \tag{1}$$
$$x + 2\lambda y = 0 \tag{2}$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

1. Fall: $y = 0$. Dann folgt aus Gleichung (2): $x = 0$; jedoch genügt $(x, y) = (0, 0)$ der Gleichung (3) nicht.

2. Fall: $y \neq 0$.
Gilt $x = 0$, so führt (1) auf $y = -1$. Für $(x, y) = (0, -1)$ sind sowohl Gleichung (2) (mit $\lambda = 0$) als auch (3) erfüllt.
Sei nun $x \neq 0$. In diesem Fall liefern (1) bzw. (2)

$$\lambda = -\frac{y+1}{2x} \qquad \text{sowie} \qquad \lambda = -\frac{x}{2y}\,.$$

Also ist

$$\frac{y+1}{2x} = \frac{x}{2y} \qquad \iff \qquad y^2 + y = x^2.$$

Setzt man dies in (3) ein, so erhält man

$$(y^2 + y) + y^2 - 1 = 0 \qquad \iff \qquad 2y^2 + y - 1 = 0 \qquad \iff \qquad y = -1 \;\text{ oder }\; y = \frac{1}{2}.$$

Für $y = -1$ hat man wegen (3): $x^2 = 0$, d.h. $x = 0$. Für $y = \frac{1}{2}$ gilt nach (3)

$$x^2 + \frac{1}{4} - 1 = 0 \qquad \iff \qquad x^2 = \frac{3}{4} \qquad \iff \qquad x = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\text{ oder }\; x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aufgrund von

$$f\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\Big) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,, \qquad f\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\Big) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad \text{und} \qquad f(0, -1) = 0$$

besitzt f auf S das Maximum $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ und das Minimum $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

b) Es gilt

$$\operatorname{grad} g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x \end{pmatrix}.$$

Ist $\operatorname{grad} g(x, y) = (0, 0)$, so folgt wegen der zweiten Komponente $x = 0$ und daher $y = 0$. Demnach ist $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von g, also der einzige Kandidat für eine lokale Extremstelle von g. Die Hessematrix

$$H_g(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist indefinit, weil $\det H_g(0, 0) = -1 < 0$ gilt. Daher besitzt g in $(0, 0)$ einen Sattelpunkt und kein lokales Extremum.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Mit $\vec{v}(x, y, z) =: \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix}$ gelten

$$\begin{aligned} \partial_1 v_2(x, y, z) &= 2y = \partial_2 v_1(x, y, z), \\ \partial_1 v_3(x, y, z) &= 2x = \partial_3 v_1(x, y, z), \\ \partial_2 v_3(x, y, z) &= 2z = \partial_3 v_2(x, y, z). \end{aligned}$$

Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Wir berechnen ein zugehöriges Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Wegen $\partial_x f(x, y, z) = y^2 + 2xz$ gilt $f(x, y, z) = xy^2 + x^2 z + h(y, z)$ für eine differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_y f(x, y, z) = v_2(x, y, z)$ und $\partial_y f(x, y, z) = 2xy + \partial_y h(y, z)$ folgt $\partial_y h(y, z) = z^2$, also $h(y, z) = yz^2 + g(z)$ für ein geeignetes $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Damit ist $f(x,y,z) = xy^2 + x^2z + yz^2 + g(z)$. Die Gleichungen $\partial_z f(x,y,z) = v_3(x,y,z)$ und $\partial_z f(x,y,z) = x^2 + 2yz + g'(z)$ führen auf $g'(z) = 0$; dies ist beispielsweise für $g \equiv 0$ erfüllt. Somit gilt $\nabla f = v$ für $f(x,y,z) = xy^2 + x^2z + yz^2$. Deshalb ergibt sich

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(1,0,\pi^{2009}) - f(1,0,0) = \pi^{2009}.$$

b) Für $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x - y \\ x \end{pmatrix}$, und $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, gilt

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\cos t}(-\sin t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)\, dt \\ &= \big[e^{\cos t} + t\big]_0^{2\pi} = 2\pi.\end{aligned}$$

Alternativ kann man das Kurvenintegral auch mit dem Gaußschen Integralsatz berechnen:

Da alle partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig sind, gilt $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Bezeichnet $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe, so ist G offen und konvex und daher ein Gebiet. Ferner besteht ∂G aus der positiv orientierten Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G \big(\partial_x x - \partial_y(e^x - y)\big)\, d(x,y) = \iint_G 2\, d(x,y) = 2\pi,$$

weil ein Kreis mit Radius 1 den Flächeninhalt $\pi \cdot 1^2 = \pi$ besitzt.