Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
03.07.2010

Übungsklausur

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie, dass durch $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und durch $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ gegeben ist.

b) Stellen Sie die Standardbasisvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Basis $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ dar.

c) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasen im Urbild $\mathbb{R}^3$ und Bild $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die zweite Spalte der Darstellungsmatrix von $\vec{f}$ bezüglich der Basis $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ im Urbild $\mathbb{R}^3$ und der Basis $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ im Bild $\mathbb{R}^2$.

d) Ist $\vec{f}$ injektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei die von zwei reellen Parametern abhängige Matrix

$$A_{\alpha,\beta} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \beta+1 & -\alpha & \beta-1 \\ 5 & 7 & \alpha \\ -\alpha & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $A_{\alpha,\beta}$ ist.

Geben Sie den zugehörigen Eigenwert an.

b) Nun sei $\alpha = -5$ und $\beta = 6$. Berechnen Sie alle Eigenwerte von $A := A_{-5,6}$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Begründen Sie, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 - y\cos(uv) + z^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 &= 2 \\ xy - \sin(u)\,\cos(v) + z &= 0 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, \frac{\pi}{2}, 0)$ nach x, y, z aufgelöst werden können. Es bezeichne $x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v)$ die Auflösungen. Berechnen Sie $(D_1 f)(\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(D_2 f)(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Es sei $G_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0\}$. Berechnen Sie

$$\iiint_{G_1} \sqrt{x^2 + y^2}\, d(x, y, z)\,.$$

b) Bestimmen Sie das Volumen von

$$G_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den 13.07.2010, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude 05.20) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den 15.07.2010, von 13.15 Uhr bis 13.30 Uhr im Zimmer 3A-01 (Allianzgebäude 05.20) möglich.